Teoría Avanzada de la Termodinámica – 2do cuatrimestre de 2020

Guía 8: *Termodinámica de agujeros negros*

1. Considere una estrella de masa M y radio menor a su radio de Schwarzschild, $R_s = 2GM/c^2$. Muestre que una partícula ubicada a distancia R del centro de la estrella, con $R < R_s$, no puede escapar al infinito.

2. Considere dos agujeros negros de masa M, inicialmente en reposo, que, debido a su atracción mutua, terminan colisionando dando lugar a un solo agujero negro de masa M'. En general se tiene $M' \leq 2M$, y la energía restante es radiada en forma de ondas gravitatorias. A partir del teorema del área, muestre que la energía radiada no puede ser mayor que el 29 % de la energía total inicial.

3. En relatividad general, la temperatura de un sistema en equilibrio no tiene por qué ser uniforme. Esto se conoce como el *efecto Tolman*. Para entenderlo de forma semi-newtoniana, consideremos un sistema aislado formado por dos subsistemas, 1 y 2, cada uno de ellos de volumen y número de partículas constantes. En el equilibrio se maximiza la entropía total $S = S_1 + S_2$, de manera que
$$dS = dS_1 + dS_2 = 0.$$
Teniendo en cuenta que $dS_i = dU_i/T_i$, donde U_i es la energía interna del subsistema i, y que $dU_2 = -dU_1$, de la ecuación de arriba se obtiene $T_1 = T_2$, es decir, la temperatura es uniforme. Ahora bien, en relatividad general la condición $dU_2 = -dU_1$ deja de ser cierta en presencia de un campo gravitatorio: por la equivalencia entre masa y energía, la energía interna U_i pesa igual que una masa U_i/c^2, así que la conservación de la energía se expresa en la forma $dE_2 = -dE_1$, donde
$$E_i = U_i + \frac{U_i}{c^2}\phi_i$$
es la suma de la energía interna más la potencial gravitatoria (ϕ_i es el potencial gravitatorio del subsistema i). Esta descripción semi-newtoniana es válida sólo en el límite $\phi_i \ll c^2$, tomando el origen de potenciales en el infinito.

   a) Teniendo en cuenta lo anterior, calcule la relación entre T_1 y T_2 correspondiente al equilibrio térmico.

   b) La temperatura de la radiación de Hawking, $T = 1/(8\pi M)$, es la que mide un observador muy lejos del agujero negro. ¿Cómo varía esta temperatura a medida que el observador se acerca al agujero negro?

4. La potencia radiada por un cuerpo negro a temperatura T está dada por la ley de Stefan-Boltzmann,
$$\frac{P}{A} = \sigma T^4,$$
donde A es el área del cuerpo negro y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor en unidades $\hbar = c = k = 1$ es $\sigma = \pi^2/60$.

a) Escriba la ecuación diferencial que describe la evolución en el tiempo de la masa de un agujero negro que se evapora.

b) Calcule el tiempo que tarda en evaporarse completamente un agujero negro de masa inicial M, y estime su valor en segundos en el caso en que M es la masa del sol. Compare con la edad del universo, que es de unos 10^{17} segundos.

5. Supongamos que la radiación de Hawking está hecha de fotones. Los fotones son bosones ultrarrelativistas con potencial químico $\mu = 0$ y degeneración de spin $g_s = 2$, así que su función de partición grancanónica está dada por

$$\log \mathcal{Z} = -2 \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} \log\left(1 - e^{-\beta c p}\right).$$

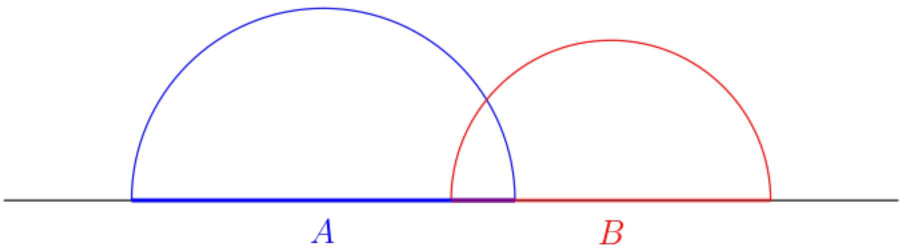
a) Calcule explícitamente esta integral, teniendo en cuenta que

$$\zeta(4) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{90}.$$

b) A partir de su resultado, obtenga la relación entre la entropía, la energía y la temperatura del gas de fotones.

c) Considere un agujero negro a temperatura T, que en un breve intervalo de su proceso de evaporación pierde una masa dM. Muestre que se satisface la segunda ley generalizada, $dS_{BH} + dS_{\text{rad}} \geq 0$, donde dS_{BH} es el incremento de entropía del agujero negro y dS_{rad} es la entropía de la radiación emitida.

6. En la figura se muestran dos regiones, A y B, del borde de AdS, y sus respectivas superficies de Ryu-Takayanagi.



A partir del dibujo, muestre que la fórmula de Ryu-Takayanagi implica la subaditividad fuerte de la entropía, $S(A \cup B) + S(A \cap B) \leq S(A) + S(B)$. No es necesario usar ninguna propiedad de la geometría de AdS.