Guía 1: Probabilidades

Termodinámica Avanzada - 2°C 2020

En estas notas veremos los problemas 1 y 3 de la guía 1 (Probabilidades). El ejercicio 1 (dispersión de partículas) posee dos ítems: el ítem a) sale en un renglón y no representa mayor complicación más que entender el enunciado. El ítem b) es, quizás, el más enriquecedor de este problema y consta de dos partes; la primer parte del ejercicio es tratar de entender la "geometría" del mismo - donde tendremos que ver quiénes son los ángulos, normal, etc involucrados allí - mientras que en la segunda parte (ahora ya sí conociendo los ángulos y demás) vamos a calcular la densidad de probabilidad correspondiente.

Por otro lado, y último, resolveremos el primer ítem del problema 3 que trata de hallar la densidad de probabilidad para el caso donde nuestras variables obedecen una distribución del tipo caminata al azar discreta.

Índice

---

1. Dispersión de partículas

Antes de comenzar a resolver el ejercicio vamos a aclarar algo de **notación**: en el enunciado nos dicen que la densidad de probabilidad es $I(\rho)$; sin embargo, en el ítem a) nos preguntan por la densidad de probabilidad (marginal) y la denotan como $p(\rho)$. Para fijar la notación, de ahora en más (en este ejercicio) vamos a denotar a la densidad de probabilidad como I.

En general, para hallar la densidad de probabilidad marginal de cierta variable X, debemos integrar la densidad de probabilidad total (o conjunta) en las otras variables. Esto es, por ejemplo, dada una densidad de probabilidad conjunta $f_{XYZ}(x, y, z)$, para hallar la densidad de probabilidad marginal de la variable X lo que hacemos es

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x, y, z)dydz \tag{1}$$

Teniendo esto en mente, para hallar la densidad de prob. marginal $I_\rho(\rho)$ lo que tendremos que hacer es integrar en la variabl ϕ la densidad total, es decir $I(\rho)$ (independiente de ϕ según el enunciado).

$$I_\rho(\rho) = \int_0^{2\pi} I(\rho) d\phi = 2\pi I(\rho) \tag{2}$$

Notar que si integramos en la variable ρ, el resultado integra a 1 como es de esperar:

$$\int_0^{\infty} I_\rho(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} I(\rho) d\rho = 1 \tag{3}$$

1.1. Hallando la densidad de probabilidad

El problema nos pide que hallemos la dens. de prob. $I_d(\theta)$, pero para eso debemos saber **quién** es el ángulo θ primero. Como la situación trata de un choque elástico, $\varphi_i = \varphi_e \equiv \varphi$ y por lo tanto $\pi = \theta + 2\varphi$ (ver Fig.1).

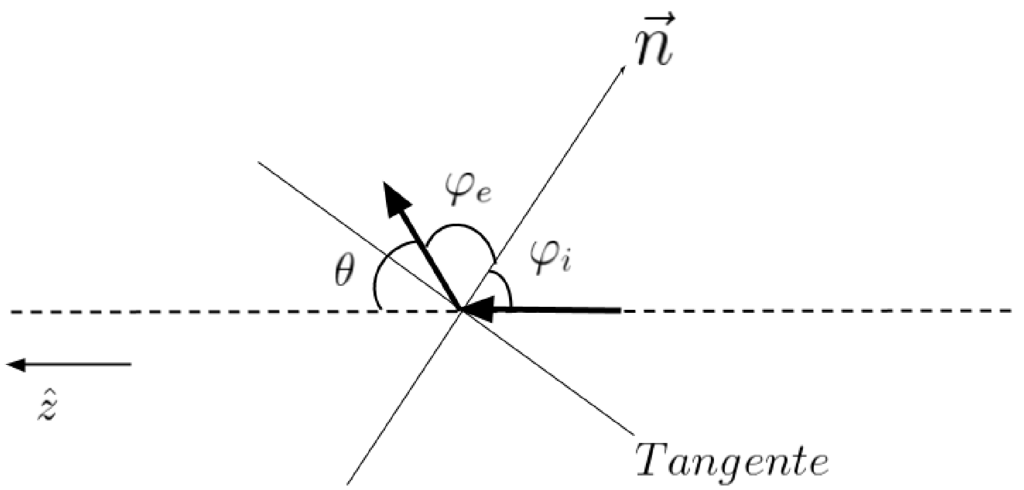

Figura 1: Partícula que se mueve según el eje $\hat{z}$ donde la misma incide con un ángulo φ_i y es dispersada por un ángulo φ_e, ambos respecto a la normal $\vec{n}$.

El objetivo es ver quién es θ, pero el mismo lo tenemos escrito en términos de φ que no es dato. Entonces para averigüar θ primero tenemos que ver quién es φ. Para eso vamos a tener que hallar la normal $\vec{n}$; luego, $\varphi = \arctan\left(|n_{xy}/n_z|\right)$ donde n_j son las componentes del vector $\vec{n}$ con n_{xy} la proyección en el plano xy ($n_{xy} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$).

Vamos a parametrizar al paraboloide según

$$\vec{u} = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \alpha\rho^2) \tag{4}$$

Las direcciones tangentes vendrán dadas por

$$\vec{u}_\rho = (\cos\phi, \sin\phi, 2\alpha\rho)\,, \qquad \vec{u}_\phi = (-\rho\sin\phi, \rho\cos\phi, 0) \tag{5}$$

Luego,

$$\vec{n} = \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\phi = (-2\alpha\rho^2\cos\phi, -2\alpha\rho^2\sin\phi, \rho) \tag{6}$$

Pero antes de seguir hay que notar una sutileza: este $\vec{n}$ que acabamos de hallar apunta en la dirección contraria según la figura (sería la normal *interior*) ya que estamos en $-\hat{z}$. Por lo tanto, el $\vec{n}$ que nos interesa será $\vec{n} \longrightarrow -\vec{n}$. Teniendo esto en cuenta, el ángulo φ será

$$\varphi = \arctan(2\alpha\rho) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \pi - 2\arctan(2\alpha\rho) \tag{7}$$

Hasta acá lo que hicimos fue estudiar la parte "geométrica", que como vemos no representó problema alguno (creo). La idea a continuación será hallar la distribución $I_d(\theta)$ ahora que ya sabemos quién es el ángulo θ. Para eso vamos a ver **dos formas** de hallar dicha distribución:

Como la probabilidad se conserva a lo largo del haz,

$$I_\rho(\rho)d\rho = I_d(\theta)d\theta \tag{8}$$

La idea ahora será cambiar de la variable ρ a la variable θ para luego identificar $I_d(\theta)$. Para eso, a partir de la Ec.(7) obtenemos que

$$\rho = \frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right), \qquad d\rho = -\frac{1}{4\alpha}\frac{d\theta}{\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} \tag{9}$$

Luego,

$$I_\rho(\rho)d\rho = I_\rho\left(\frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right)\frac{d\rho}{d\theta}d\theta = -I_\rho\left(\frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right)\frac{1}{4\alpha}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}d\theta \tag{10}$$

y por lo tanto la dens. de prob. en la variable θ resulta

$$I_d(\theta) = -I_\rho\left(\frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right)\frac{1}{4\alpha\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} \tag{11}$$

Pero esta densidad es **negativa!** ☹

¿Dónde estuvo el error? $\longrightarrow$ el Jacobiano debe ir con módulo!

$$\frac{d\rho}{d\theta} \longrightarrow \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| \tag{12}$$

De esta manera, ahora sí, la densidad resulta igual que la Ec. (11) pero con el signo adecuado ☺

Otra forma de hallar la distribución en la variable deseada es usando la siguiente **definición**: Dadas N variables aleatorias $\{X_i\}$ $(i = 1, ..., N)$ cuya dens. de prob. conjunta es $f_{X_1,...,X_N}(x_1, ..., x_N)$ y es conocida, si tenemos una nueva variable $S = G(X_1, ..., X_N)$ entonces la dens. de prob. para la variable S, $f_S(s)$, se puede obtener según

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N\, \delta(s - G(x_1, ..., x_N)) f_{X_1,...,X_N}(x_1, ..., x_N) \tag{13}$$

En nuestro caso, la prob. conjunta viene dada por $I(\rho)$, la nueva variable es θ, y la función $G(X_1, ..., X_N) = -2\arctan(2\alpha\rho) + \pi$. De esta manera resulta

$$I_d(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho\, \delta[\theta - (\pi - 2\arctan(2\alpha\rho))] I_\rho(\rho) \tag{14}$$

Notemos que la variable de integración ρ, en la delta, se encuentra dentro de una función (arctan), entonces para poder "aplicar" la delta lo que tendremos que usar será que

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{15}$$

donde x_i son los ceros de la función $g(x)$. En este caso, los ceros (un único) vienen dados por

$$\rho_0 = \frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad g'(\rho)|_{\rho_0} = \left.\frac{4\alpha}{1+4\alpha^2\rho^2}\right|_{\rho_0} = 4\alpha\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) \tag{16}$$

que reemplazando en la integral obtenemos, al igual que antes,

$$I_d(\theta) = I_\rho\left(\frac{1}{2\alpha}\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right)\frac{1}{4\alpha\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)} \tag{17}$$

2. Desplazamientos discretos

En este ejercicio la idea es hallar la dens. de la nueva variable $S = X_1 + \cdots + X_N$, dada la densidad $p_{X_i}(x)$ de las variables X_i. En nuestro caso, las densidades de las variables son todas iguales, $p_{X_i}(x) = p(x)$, y viene dada por $p(x) = p\delta(x-a) + q\delta(x+a)$ con $q = 1-p$.

El ejercicio plantea una sugerencia que es o bien hallar la dens. usando la delta, o bien usando la función característica. El primero consiste en usar la ec. (13),

$$\begin{aligned} p_S(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_N\,\delta(s - x_1 - ... - x_N)p_{X_1,...,X_N}(x_1,...,x_N) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\,p_{X_1}(x_1)\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dx_N\,\delta(s - x_1 - ... - x_N)p_{X_N}(x_N) \end{aligned} \tag{18}$$

y es lo mismo que hicimos antes[1]. Recordar que podemos escibir la delta según

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,e^{ikx} \tag{19}$$

En este caso, esta forma de resolver el ejercicio es medio tedioso y para nada lindo. Sin embargo, está el otro método que resulta más sencillo; veamos cómo trabajar con la **función característica** (o función de partición).

Calculamos la función característica para la variable S según

$$\mathcal{Z}_S(ik) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_N\,e^{ikS(X_1,...,X_N)}p_{x_1,...,x_N}(x_1,...,x_N) \tag{20}$$

Como las variables son independientes y poseen la misma dens.

$$\mathcal{Z}_S(ik) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\,e^{ikx}(p\delta(x-a) + q\delta(x+a))\right]^N$$

[1]Notar que acá, dada la distribución, quedarán productos de deltas, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(\alpha - x)\delta(x-\beta) = \delta(\alpha-\beta)$.

$$= \left(pe^{ika} + qe^{-ika}\right)^N = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} p^r e^{ikra} q^{N-r} e^{-ika(N-r)} \tag{21}$$

A partir de la función característica $\mathcal{Z}$, calculamos la densidad de la nueva variable S antitransformando la expresión. Esto es

$$p_S(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-iks} \mathcal{Z}_S(ik) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ik(s+aN-2ra)} \tag{22}$$

Si vemos la expresión para la delta, ec.(19), podemos ver fácilmente que la integral no es otra cosa más que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ik(s+aN-2ra)} = 2\pi\delta(s + aN - 2ra) \tag{23}$$

donde usamos que la delta es una función par, $\delta(-x) = \delta(x)$. De esta manera, la dens. para la variable S resulta

$$p_S(s) = \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} p^r q^{N-r} \delta(s + a(N - 2r)) \tag{24}$$

Notemos que esta distribución no es más que una (tipo) binomial, cosa que era de esperar dada la distribución inicial $p(x) = p\delta(x - a) + q\delta(x + a)$ con $q = 1 - p$. Sin embargo hay que notar que no es propiamente una binomial ya que está escrita como una **densidad** de probabilidad, que no es la forma usual en que se presenta la distribución binomial (es decir, faltaría integrar). Para estudiar qué sucede con esta distribución vamos a recordar que una **distribución binomial** viene dada por una distribución del tipo

$$f(x) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \tag{25}$$

donde N es la cantidad de repeticiones de algún experimento, k son los éxitos de dicho experimento, y $q = 1-p$ (o, de forma similar, se realiza un experimento N veces donde ocurren k éxitos con probabilidad p^k y $(N - k)$ fracasos con probabilidad $(1 - p)^{N-k}$). La distribución se ilustra en la figura 2 para distintos valores de realizaciones N y distintos valores de la probabilidad de éxito p.

Notemos que la diferencia entre la distribución $p_S(s)$, ec.(24), y una distribución binomial, ec.(25), es la suma en la cantidad de éxitos y, sobre todo, la delta. Pero notemos que la delta tiene como argumento cosas que dependen solamente de la cantidad de repeticiones del experimento N; es decir, no pone restricciones sobre los valores de las probabilidades p y/o q, sino sobre las repeticiones del experimento. Es por este motivo que si variamos la cantidad de repeticiones del experimento, N, la función de distribución no se debería ver afectada cualitativamente. Por otro lado, si integramos dicha densidad en la variable s, deberíamos obtener la distribución binomial ec.(25). Pero al integrar en s, como se encuentra la delta allí presente, eso hace que desaparezca la sumatoria y obtenemos, entonces, una distribución binomial "estandar". En la figura 3 podemos ver qué sucede al variar la probabilidad p y el número de repeticiones N. Al igual que la binomial, al variar p, la distribución se desplaza. Sin embargo si varíamos N, a diferencia de la binomial, en este caso la distribución no se ve desplazada sino que lo único que sucede es que se ensancha la campana (producto de la delta involucrada).

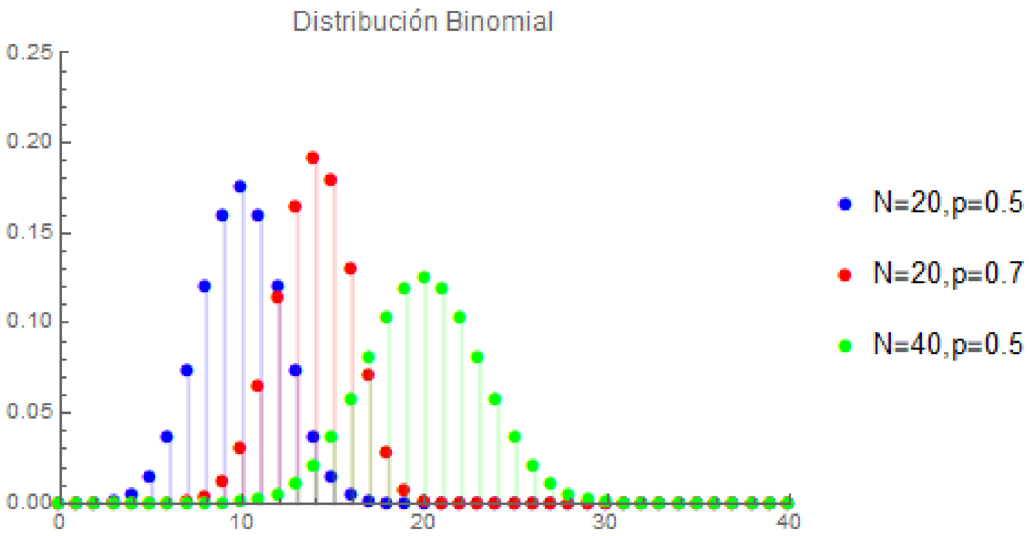

Figura 2: Distribución binomial para distintos valores de N y de p.

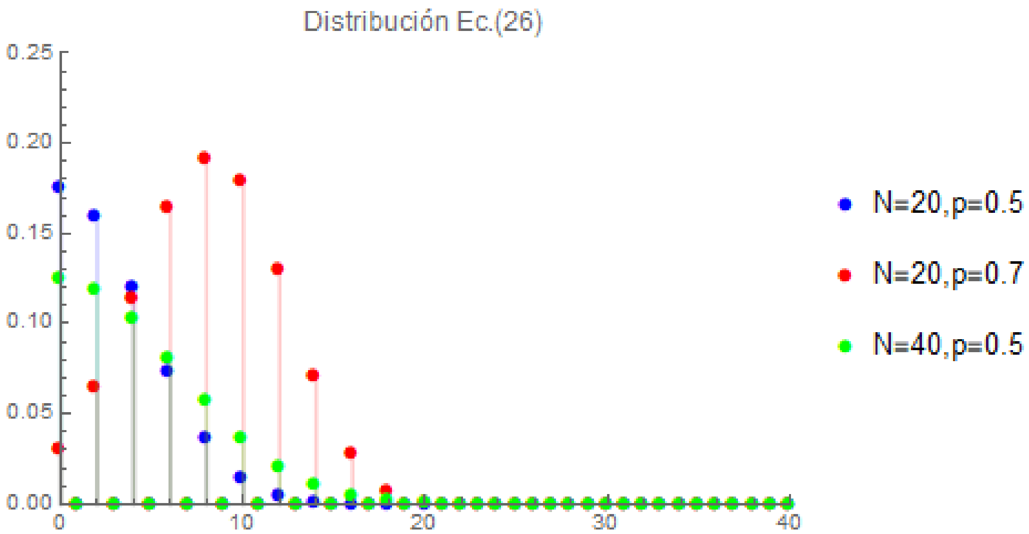

Figura 3: Distribución según la ec.(24) para distintos valores de N y de p; se utilizó $a = 1$.