Termodinámica Avanzada
Guía 1: Probabilidad

1 Variable aleatoria

- Consideremos una magnitud X cuyo valor es aleatorio (*variable aleatoria*). La función $F(x) \equiv P(X < x)$ se llama *función de probabilidad acumulada*.
- Su derivada, $f(x) \equiv F'(x)$, es la *densidad de probabilidad*. Tenemos

$$P(X \in (a,b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, f(x) \tag{1}$$

$\Rightarrow f(x)dx$ es la probabilidad de que X caiga entre x y $x + dx$.

- Sean X e Y variables aleatorias. Si $f(x,y)dxdy$ es la probabilidad de que X caiga entre x y $x + dx$ e Y caiga entre y e $y + dy$, a la función f se la llama *densidad de probabilidad conjunta*.

2 Relación entre variables

Conocemos la densidad de probabilidad conjunta f para las variables $X_1, \ldots, X_n$ y queremos saber la densidad g para la variable $Y = h(X_1, \ldots, X_n)$.

Caso $n = 1$, h invertible.

$$\begin{aligned} g(y)dy &= f(x)|dx| = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| dy \\ \Rightarrow \quad g(y) &= f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{f(x)}{|h'(x)|}. \end{aligned} \tag{2}$$

Por ejemplo, si $Y = X^3$ tenemos

$$g(y) = \frac{f(y^{1/3})}{3y^{2/3}}. \tag{3}$$

Caso general. Si G es la función de probabilidad acumulada para Y, tenemos

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(h(X_1, \ldots, X_n) < y) \\ &= \int_{h(x_1,\ldots,x_n)<y} dx_1 \ldots dx_n \, f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int dx_1 \ldots dx_n \, f(x_1, \ldots, x_n) \, \theta(y - h(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned} \tag{4}$$

Como $\theta'(x) = \delta(x)$, la densidad de probabilidad es

$$g(y) = \int dx_1 \ldots dx_n \, f(x_1, \ldots, x_n) \, \delta(y - h(x_1, \ldots, x_n)). \tag{5}$$

Veamos que recuperamos lo anterior en el caso $n = 1$, h invertible. Para f invertible la delta de Dirac cumple $\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|$, donde $f(x_0) = 0$. Por lo tanto,

$$\delta(y - h(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|h'(x_0)|} \tag{6}$$

donde $h(x_0) = y$. Reemplazando en (5) con $n = 1$ recuperamos lo anterior,

$$g(y) = \int dx \, f(x) \, \delta(y - h(x)) = \int dx \, f(x) \, \frac{\delta(x - x_0)}{|h'(x_0)|} = \frac{f(x_0)}{|h'(x_0)|}. \tag{7}$$

Ejemplo importante. Tomemos $Y = X_1 + \cdots + X_n$, y supongamos que las variables X_i son independientes, $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$. Entonces tenemos

$$g(y) = \int dx_1 \ldots dx_n \, f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) \, \delta(y - x_1 - \cdots - x_n). \tag{8}$$

Ahora recordemos la definición de la transformada de Fourier $\tilde{f}$ de una función f,

$$\tilde{f}(k) = \int dx \, f(x) \, e^{-ikx}. \tag{9}$$

La transformada de Fourier es invertible,

$$f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \, \tilde{f}(k) \, e^{ikx}. \tag{10}$$

Aplicando la definición (9) a la delta obtenemos

$$\tilde{\delta}(k) = \int dx \, \delta(x) \, e^{-ikx} = 1 \tag{11}$$

y por lo tanto, reemplazando en (10),

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \, e^{ikx}. \tag{12}$$

Usando este resultado podemos reescribir (8) en la forma

$$\begin{aligned} g(y) &= \int \frac{dk}{2\pi} \int dx_1 \dots dx_n \, f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \, e^{ik(y-x_1-\dots-x_n)} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \, e^{iky} \, \tilde{f}_1(k) \dots \tilde{f}_n(k). \end{aligned} \tag{13}$$

3 Función generatriz

Sea X una variable aleatoria con densidad de probabilidad f. La función $Z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$Z(z) = \langle e^{zX} \rangle = \int dx \, f(x) \, e^{zx} \tag{14}$$

se llama *función generatriz de momentos*. Sus derivadas en el origen son los momentos de la distribución,

$$\left. \frac{d^n Z}{dz^n} \right|_{z=0} = \langle X^n \rangle. \tag{15}$$

Conocer la función generatriz es lo mismo que conocer f, porque $Z(-ik) = \tilde{f}(k)$. El logaritmo de la función generatriz de momentos,

$$W = \log Z, \tag{16}$$

se llama la *función generatriz de cumulantes*. Sus derivadas en el origen son los *cumulantes*, que son polinomios de los momentos.

Ejemplo 1: $f(x) = \delta(x - \mu)$.

$$Z(z) = e^{z\mu} \quad \Rightarrow \quad W(z) = z\mu. \tag{17}$$

Ejemplo 2: $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) \, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ (distribución gaussiana).

$$Z(z) = e^{z\mu + z^2\sigma^2/2} \quad \Rightarrow \quad W(z) = z\mu + \frac{1}{2} z^2 \sigma^2. \tag{18}$$

Sean X e Y variables independientes, con distribuciones f_X y f_Y respectivamente. La función generatriz de la variable $X + Y$ es

$$\begin{aligned} Z_{X+Y}(z) = \langle e^{z(X+Y)} \rangle &= \int dxdy \, f_X(x) f_Y(y) e^{z(x+y)} \\ &= \langle e^{zX} \rangle \langle e^{zY} \rangle = Z_X(z) Z_Y(z). \end{aligned} \tag{19}$$

Nótese que esta ecuación, con $z = -ik$, es lo mismo que la ecuación (13): la transformada de Fourier de la densidad de $X + Y$ es el producto de las transformadas de las densidades de X e Y. Tomando logaritmo obtenemos

$$W_{X+Y} = W_X + W_Y. \tag{20}$$

Otra propiedad sencilla de la función generatriz: dado un número real λ,

$$Z_{\lambda X}(z) = \langle e^{z\lambda X} \rangle = Z_X(\lambda z) \tag{21}$$

y por lo tanto también se tiene

$$W_{\lambda X}(z) = W_X(\lambda z). \tag{22}$$

4 Ley de grandes números y teorema central del límite

Consideremos un experimento donde el evento E ocurre con probabilidad p, y sea X la variable que toma el valor 1 si E ocurre y 0 si no ocurre. Entonces

$$Z_X(z) = \langle e^{zX} \rangle = pe^z + 1 - p, \tag{23}$$

y por lo tanto

$$W_X(z) = \log\left(pe^z + 1 - p\right). \tag{24}$$

Supongamos ahora que repetimos el experimento N veces. La frecuencia relativa con la que ocurre el evento E (es decir, el número de veces que ocurre dividido por N) es la variable aleatoria $S = (X_1 + \cdots + X_N)/N$, donde X_i es la variable que toma el valor 1 si E ocurre en la i-ésima repetición y 0 si no ocurre en esa repetición. Por las propiedades (20) y (22), junto con el resultado (24), la función generatriz de cumulantes de S es

$$\begin{aligned} W_S(z) &= W_{(X_1+\cdots+X_N)/N}(z) = W_{X_1+\cdots+X_N}(z/N) = NW_X(z/N) \\ &= N\log\left(pe^{z/N} + 1 - p\right). \end{aligned} \tag{25}$$

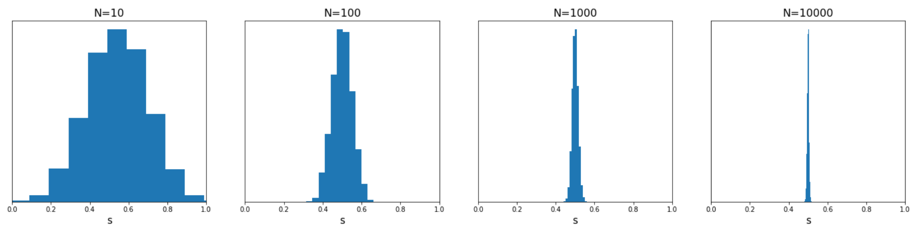
Ahora supongamos que N es muy grande. Entonces tenemos $e^{z/N} \simeq 1 + z/N$ y por lo tanto

$$W_S(z) \simeq N\log\left(1 + pz/N\right) \simeq pz. \tag{26}$$

Como hemos visto en la ecuación (17), ésta es la función generatriz de la delta centrada en p, así que

$$f_S(s) \simeq \delta(s - p). \tag{27}$$

Es decir, si el número de repeticiones es muy grande, estamos seguros de que la frecuencia relativa con la que ocurre el evento E es igual a su probabilidad. Ésta es la *ley de grandes números*. En la siguiente figura mostramos un ejemplo: el experimento consiste en lanzar una moneda, y E es el evento “sale cara”. Simulamos con la computadora una secuencia de N repeticiones del experimento, repetimos la secuencia muchas veces y obtenemos un histograma para s. Como se ve, a medida que N aumenta el histograma se va estrechando cada vez más alrededor de $s = p = 1/2$.



Volvamos al resultado (25) para la función generatriz de S, pero ahora expandamos hasta segundo orden en $1/N$. Tenemos $e^{z/N} \simeq 1 + z/N + z^2/2N^2$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} W_S(z) &\simeq N \log\left(1 + pz/N + pz^2/2N^2\right) \simeq N\left(\frac{pz}{N} + \frac{pz^2}{2N^2} - \frac{p^2z^2}{2N^2}\right) \\ &= pz + \frac{p(1-p)}{2N} z^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Comparando con (18) vemos que, a este orden, f_S es una gaussiana centrada en p y con anchura $\sigma = \sqrt{p(1-p)/N}$. Éste es el *teorema central del límite*. En la siguiente figura repetimos el mismo procedimiento de antes, pero ampliando la escala de los histogramas para ver mejor su forma, y los comparamos con esta gaussiana.