

# Teoría cinética de plasmas: Ecuación de Vlasov

Temas Avanzados de Termodinámica - 2ºc 2020

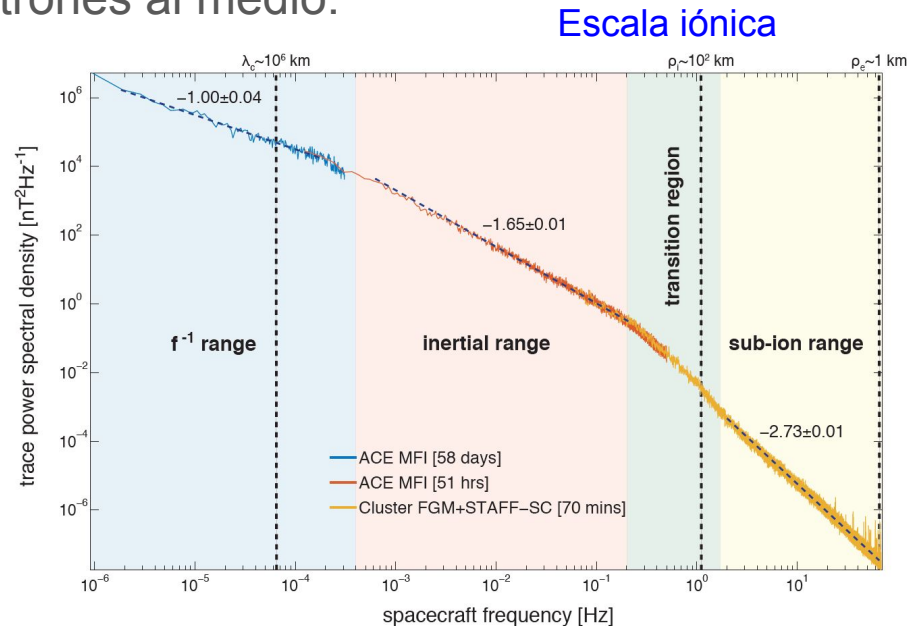
Facundo Pugliese

# Plasmas y teoría cinética

Un plasma es un gas a altísima temperatura ( $T \sim 10^5 \text{K}$ ) tal que la energía térmica de sus constituyentes supera la energía de ligadura ( $k_B T \sim 1 \text{eV}$ ). Por lo tanto, parte de los átomos se ionizan, liberando electrones al medio.

El plasma puede describirse con modelos de fluidos (MHD, modelo de dos fluidos) pero solo hasta cierta **escala de disipación** comparable al “tamaño” de los iones.

Ahí entra en juego la descripción cinética de los iones. A escalas menores, también para los electrones.



# Plasmas y Boltzmann

La ecuación de Boltzmann para la densidad de probabilidad  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{col}[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$$

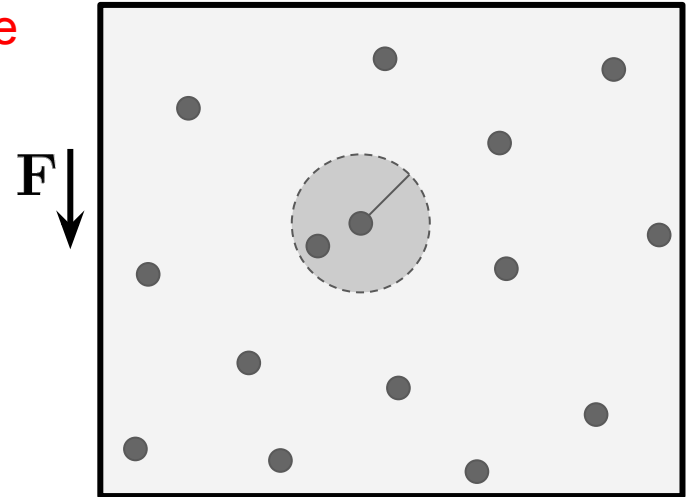
Fuerzas internas de corto alcance

Fuerzas externas de largo alcance

Pero un plasma está compuesto por partículas cargadas (iones, protones y electrones) que interactúan electromagnéticamente.

**Y las fuerzas internas electromagnéticas son de largo alcance...**

¿Cómo modelamos entonces esta interacción?



# Ecuación de Vlasov (no relativista)

La propuesta es eliminar el término colisional y concentrar todas las fuerzas de interacción en la “fuerza externa”  $\mathbf{F}$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

dónde  $\alpha$  referencia la *especie* de cada partícula (electrones, protones, distintos tipos de iones). **Tenemos una ecuación para cada especie.**

Además,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son los generados por las propias partículas, por lo que las especies interactúan a través de los campos.

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow (\dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N; \dot{\mathbf{v}}_1, \dots, \dot{\mathbf{v}}_N)$$
A diagram consisting of a horizontal line with an upward-pointing arrow at its left end. The line starts under the velocity derivatives  $\dot{\mathbf{v}}_1, \dots, \dot{\mathbf{v}}_N$  and extends to the left, ending under the fields  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ .

# Ecuación de Vlasov (no relativista)

La propuesta es eliminar el término colisional y concentrar todas las fuerzas de interacción en la “fuerza externa”  $\mathbf{F}$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rho = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

Densidad de partículas  
(en el espacio de fases)

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} N_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

Introducen términos no lineales  
y de interacción entre especies

# Ecuación de Vlasov (no relativista)

Podemos ver que cualquier plasma uniforme, neutro y sin movimiento neto es solución. En particular, la distribución de Boltzmann es solución

Uniforme:  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_\alpha^{(0)}(\mathbf{v})$

Neutro:  $\sum_\alpha q_\alpha N_\alpha = 0 \Rightarrow \rho = \sum_\alpha q_\alpha N_\alpha \int \overbrace{f_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}) d^3v}^{\text{Constante}} = 0$

Sin mov. neto:  $\int \mathbf{v} f_\alpha^{(0)}(\mathbf{v}) d^3v = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{j} = 0$

$$\begin{array}{l} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{B} = 0 \end{array}$$

$$\cancel{\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}} + \mathbf{v} \cdot \cancel{\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}}} + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Uniforme

# Ecuación de Vlasov: Plasma de electrones

Vamos a analizar el caso de un plasma neutro de electrones con fondo positivo. Esto corresponde a un plasma donde puede asumirse que los iones están quietos en un mar de electrones móviles (aproximación de Born-Oppenheimer)

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{V} \delta(\mathbf{v}) \quad \forall \alpha \neq e \quad f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Para un caso quasi-electrostático ( $\mathbf{u}_e$  despreciable,  $\mathbf{B} \approx 0$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( -eN \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \sum_{\alpha \neq e} \frac{q_{\alpha} N_{\alpha}}{V} \right) \stackrel{\text{Neutralidad}}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \left( -eN \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + e \frac{N}{V} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

# Linealización de Landau

Landau propuso expresar  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \underbrace{f_0(\mathbf{v})}_{\text{Solución}} + f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$       $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \ll f_0(\mathbf{v})$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ -eN \int (f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d^3v + e \frac{N}{V} \right] = -\frac{eN}{\varepsilon_0} \int f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \left[ \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right] = 0$$

Si nos quedamos a primer orden en  $f_1$  y dado que  $\mathbf{E} \sim f_1$ , llegamos a

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$



# Linealización de Landau: Fourier

Cómo el sistema es lineal, podemos transformar Fourier  $f_1$  y  $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \longrightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = 0 \implies \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = E(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{k}} \quad \text{Perturbación longitudinal}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} E(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad E(\mathbf{k}, t) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}})} = \frac{\partial f_0}{\partial u}$$

Las componentes de  $\mathbf{v}$  perpendiculares a  $\mathbf{k}$  no participan en la evolución (direcciones desacopladas). Expresamos  $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_\perp$  e integramos en  $v_\perp$

$$F_0(u) = \int f_0(\mathbf{v}) d^2v_\perp$$

$$F_1(\mathbf{k}, u, t) = \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d^2v_\perp$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{k}, u, t) + iku F_1(\mathbf{k}, u, t) - \frac{e}{m_e} E(\mathbf{k}, t) F_0'(u) = 0 \quad E(\mathbf{k}, t) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int F_1(\mathbf{k}, u, t) du$$

# Linealización de Landau: Laplace

Finalmente, transformamos Laplace en el tiempo ambas ecuaciones

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{k}, u, t) + ikuF_1(\mathbf{k}, u, t) - \frac{e}{m_e}E(\mathbf{k}, t)F_0'(u) \right] e^{-st} dt = 0$$

$$s\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) + iku\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) - \frac{e}{m_e}\tilde{E}(\mathbf{k}, s)F_0'(u) = F_1(\mathbf{k}, u, 0)$$
$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = i\frac{eN}{k\varepsilon_0} \int \tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) du$$

Con esto podemos despejar

$$\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) = \frac{1}{s + iku} \left[ F_1(\mathbf{k}, u, 0) + \frac{e}{m_e}\tilde{E}(\mathbf{k}, s)F_0'(u) \right]$$
$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = i\frac{eN}{k\varepsilon_0} \int \tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) du$$

# Linealización de Landau: Campo eléctrico

Podemos resolver el sistema lineal para obtener el campo eléctrico

$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{k}, s)}{\mathcal{D}(\mathbf{k}, s)} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{k}, s) &= i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int \frac{F_1(\mathbf{k}, u, 0)}{s + iku} du \\ \mathcal{D}(\mathbf{k}, s) &= 1 - i \frac{\omega_p^2}{k} V \int \frac{F_0'(u)}{s + iku} du \end{aligned}$$

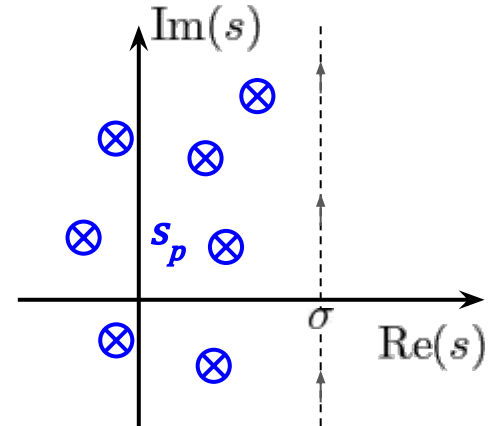
$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m V} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m}$$

Frecuencia de plasma

Y ahora invertimos Laplace

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{E}(\mathbf{k}, s) e^{st} ds = \sum_{s_p} \underbrace{\text{Res} \left[ \tilde{E}(\mathbf{k}, s), s_p \right]}_{\text{Residuo en } s_p} e^{s_p t}$$

Polos del integrando



# Linealización de Landau: Relación de dispersión

$$E(\mathbf{k}, t) = \sum_{\text{Polos del integrando } (s_p)} \text{Res} \left[ \underbrace{\tilde{E}(\mathbf{k}, s)}_{\text{Residuo en } s_p}, s_p \right] e^{s_p t} \quad \tilde{E}(\mathbf{k}, s) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{k}, s)}{\mathcal{D}(\mathbf{k}, s)} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{k}, s) &= i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int \frac{F_1(\mathbf{k}, u, 0)}{s + iku} du \\ \mathcal{D}(\mathbf{k}, s) &= 1 - i \frac{\omega_p^2}{k} V \int \frac{F_0'(u)}{s + iku} du \end{aligned}$$

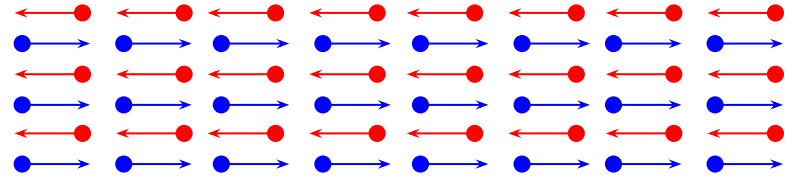
Para una  $F_1(\mathbf{k}, u, 0)$  razonable,  $\mathcal{N}(\mathbf{k}, s)$  no tiene polos, así que los polos de  $\tilde{E}(\mathbf{k}, s)$  serán únicamente los ceros de  $\mathcal{D}(\mathbf{k}, s)$ . Tenemos la **relación de dispersión**

$$0 = \mathcal{D}(\mathbf{k}, s) = 1 - i \frac{\omega_p^2}{k} V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0'(u)}{s + iku} du = 1 + \omega_p^2 V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(u)}{(s + iku)^2} du$$

Si nos interesa estudiar solo la estabilidad y/o la frecuencia de las perturbaciones, nos basta con obtener los  $s(k) = \gamma(k) + i\omega(k)$  de la relación de dispersión.

# Ejemplo: Inestabilidad de dos haces fríos

Un sistema de 2 haces fríos consiste en tener una mitad de las partículas con velocidad  $u_0$  y otra mitad con  $-u_0$



$$F_0(u) = \frac{1}{V} \left[ \frac{1}{2} \delta(u - u_0) + \frac{1}{2} \delta(u + u_0) \right]$$

$$0 = 1 + \omega_p^2 V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(u)}{(s + iku)^2} du = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \left[ \frac{1}{(s + iku_0)^2} + \frac{1}{(s - iku_0)^2} \right] = 1 + \omega_p^2 \left[ \frac{s^2 - k^2 u_0^2}{(s^2 + k^2 u_0^2)^2} \right]$$

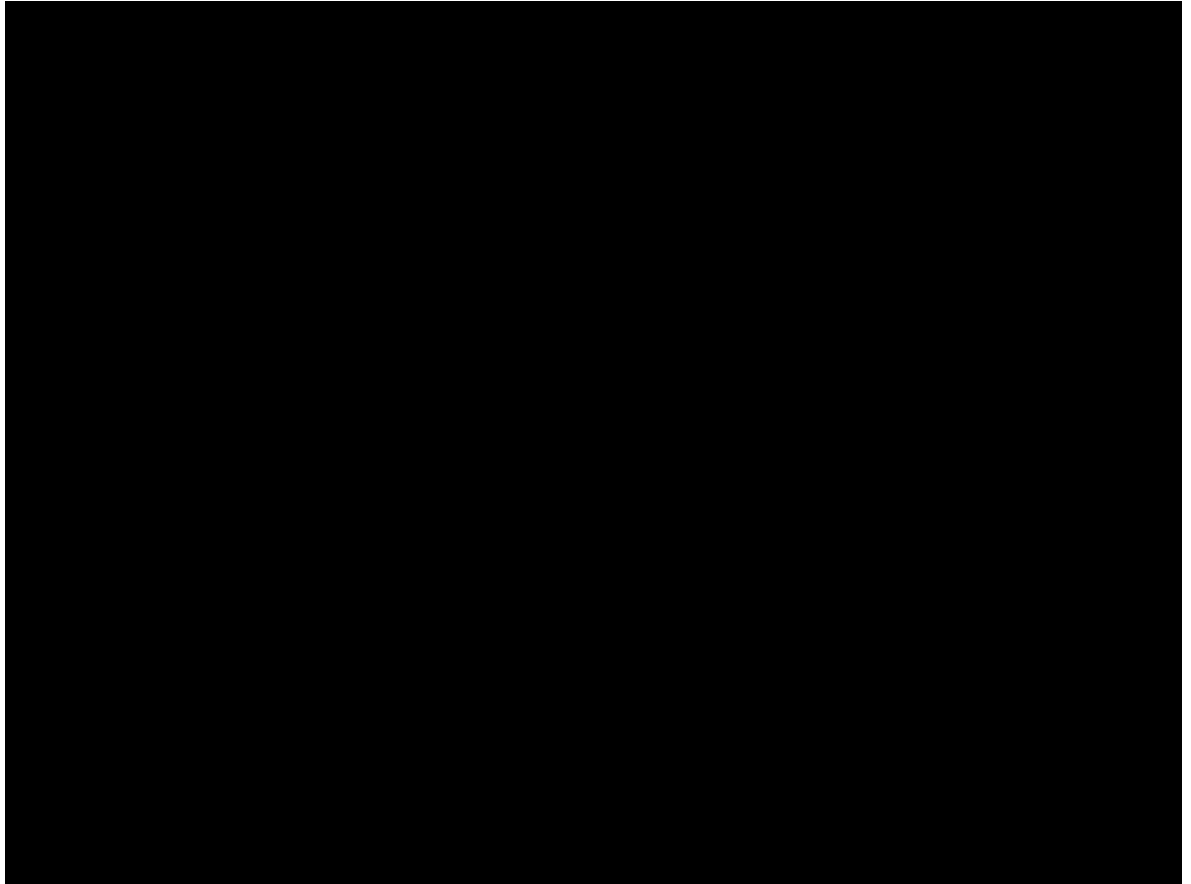
$$s = \pm \omega_p \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + 8 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2} - 1 - 2 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad s = \pm i \omega_p \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + 8 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2} + 1 + 2 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\approx \pm \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left[ 1 + 4 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2 - 1 - 2 \left( \frac{ku_0}{\omega_p} \right)^2 \right]^{1/2} = \pm ku_0 \quad \text{Inestable}$$

Oscilación pura

# Ejemplo: Inestabilidad de dos haces fríos

Simulación PIC (*particle in cell*) de la ecuación de Vlasov para un plasma de electrones bajo la aproximación electrostática pero sin linealizar.



# Ejemplo: Oscilaciones de Langmuir

Para perturbaciones con longitud de onda grande ( $k \approx 0$ ), tenemos a orden 0

$$0 = 1 + w_p^2 V \int \frac{F_0(u)}{s^2} du = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2} \implies s(k) = \pm i\omega_p$$

Oscilación pura con velocidad de grupo nula  $v_g = \frac{\partial s}{\partial k} = 0$ . No hay propagación. También se las conoce cómo **oscilaciones de plasma frío**.

Para obtener una expansión de  $s(k)$  a mayor orden, usamos aproximaciones sucesivas reescribiendo la relación de dispersión

$$0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2} V \int \frac{F_0(u)}{(1 + iku/s)^2} du \iff s^2 = -\omega_p^2 \int \frac{VF_0(u)}{(1 + iku/s)^2} du \implies s_{n+1}^2(k) = -\omega_p^2 \int \frac{VF_0(u)}{[1 + iku/s_n(k)]^2} du$$

Podemos obtener  $s_1(k)$  usando  $s_0(k) = \pm i\omega_p$  y calculando la integral.

# Ejemplo: Amortiguamiento de Landau

Pero si reemplazamos por  $s_0 = -i\omega_p$  en la fórmula, **el denominador es real**

$$s_1^2(k) = -\omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0(u)}{[1 + iku/s_0(k)]^2} du = -\omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0(u)}{[1 - ku/\omega_p]^2} du$$

Y debemos usar el límite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega \pm i\epsilon} = \text{VP} \left( \frac{1}{\omega} \right) \mp i\pi\delta(\omega)$  para poder calcular la integral.

$$s_1^2(k) = \omega_p^2 \frac{\omega_p}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0'(u)}{1 - ku/\omega_p} du = \omega_p^2 \frac{\omega_p}{k} \left[ \text{VP} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0'(u)}{1 - ku/\omega_p} du \right) - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} VF_0'(u) \delta(1 - ku/\omega_p) du \right]$$

$$s_1^2(k) = -\omega_p^2 \text{VP} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0(u)}{[1 + ku/\omega_p]^2} du \right) + i\omega_p^2 \left( \frac{\omega_p}{k} \right)^2 \pi VF_0' \left( \frac{\omega_p}{k} \right)$$

A este orden, vemos que el **primer término siempre será real y negativo**, mientras que el **segundo será imaginario puro**.



# Amortiguamiento de Landau

Para calcular la primer integral, expandimos el denominador en serie de potencias

$$\begin{aligned} \text{VP} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF_0(u)}{[1 - ku/\omega_p]^2} du \right) &= \text{VP} \left( \int_{-\infty}^{\infty} VF_0(u) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{ku}{\omega_p} \right)^{n-1} \right] du \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{k}{\omega_p} \right)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} VF_0(u) u^{n-1} du = \sum_{n=1}^{\infty} n \langle u^{n-1} \rangle_0 \left( \frac{k}{\omega_p} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$s_1^2(k) = \gamma_1^2(k) - \omega_1^2(k) + 2i\gamma_1(k)\omega_1(k) = -\omega_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \langle u^{n-1} \rangle_0 \left( \frac{k}{\omega_p} \right)^{n-1} + i \frac{\omega_p^4}{k^2} \pi V F_0' \left( \frac{\omega_p}{k} \right)$$

Si despreciamos el término cuadrático en  $\gamma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_1^2(k) &\approx \omega_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \langle u^{n-1} \rangle_0 \left( \frac{k}{\omega_p} \right)^{n-1} \\ \gamma_1(k) &\approx \frac{\omega_p^3}{k^2} \frac{\pi}{2} V F_0' \left( \frac{\omega_p}{k} \right) \end{aligned}$$

**Recordar:**

$$E_1(\mathbf{k}, t) = E_1(\mathbf{k}, 0) e^{\gamma_1(k)t} e^{i\omega_1(k)t}$$

# ¿Amortiguamiento? de Landau

Para interpretar  $\gamma_1$ , relacionamos  $F_0$  con la cantidad de partículas con velocidad  $u$

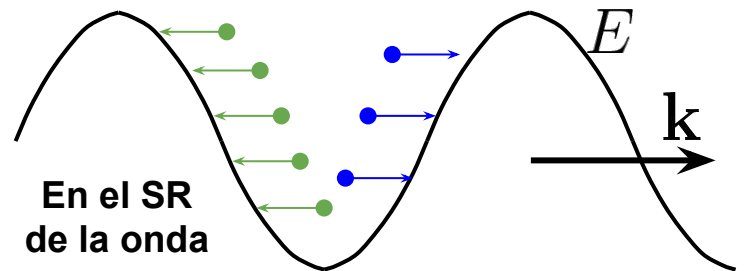
$$\gamma_1(k) \sim F_0' \left( \frac{\omega_p}{k} \right) \sim F_0'(v_f) \sim \underbrace{F_0(v_f + du)}_{\sim \# e^- \text{ apenas más rápidos que la onda}} - \underbrace{F_0(v_f - du)}_{\sim \# e^- \text{ apenas más lentos que la onda}}$$

Velocidad de fase de la perturbación electrostática      ~ # e<sup>-</sup> apenas más rápidos que la onda      ~ # e<sup>-</sup> apenas más lentos que la onda

Solo los e<sup>-</sup> con velocidad similar a la onda pueden “chocar” con ella: los e<sup>-</sup> más lentos que la onda le roban energía mientras que los más rápidos le entregan.

$$\gamma_1(k) \sim \underbrace{\# \text{ choques que entregan energía}}_{\text{blue}} - \underbrace{\# \text{ choques que roban energía}}_{\text{green}}$$

Si hay más electrones lentos que rápidos ( $\gamma < 0$ ), **la energía eléctrica de la onda se transforma en energía cinética** de los electrones y la perturbación decae.

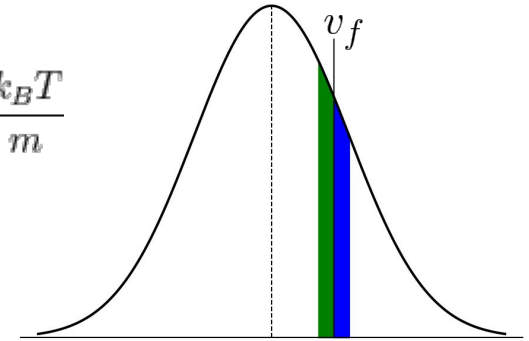


# Amortiguamiento de Landau

Para una distribución de Maxwell-Boltzmann

$$VF_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_T^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{2v_T^2}\right] \quad \text{con } v_T^2 = \frac{k_B T}{m}$$

$$VF_0'(u) = -\frac{u}{v_T^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_T^2}} \exp\left[-\frac{u^2}{2v_T^2}\right]$$



Los momentos impares se anulan y usando la fórmula de Novikov

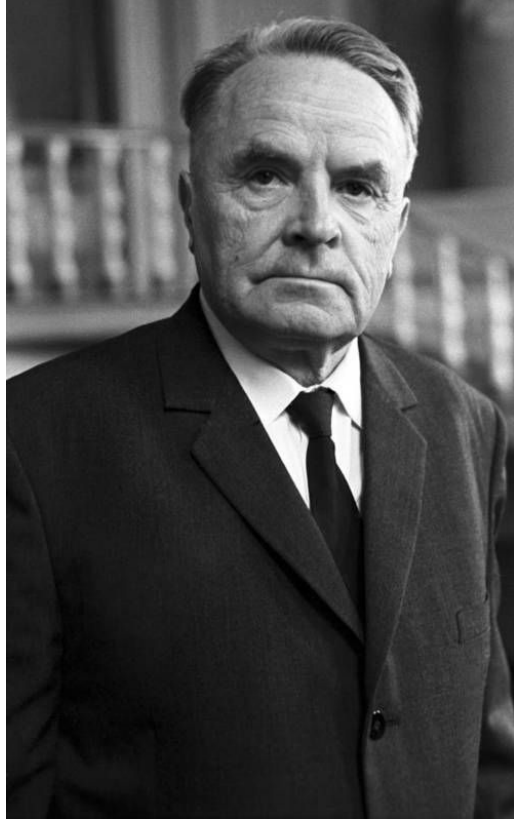
$$\omega_1^2(k) \approx \omega_p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)!! \left(\frac{kv_T}{\omega_p}\right)^{2n} = \omega_p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)!! (k\lambda_D)^{2n} = \omega_p^2 [1 + 3(k\lambda_D)^2 + 15(k\lambda_D)^4 + \dots]$$

$$\gamma_1(k) \approx -\omega_p \left(\frac{\omega_p}{kv_T}\right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{kv_T}\right)^2\right] = -\omega_p (k\lambda_D)^{-3} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left[-\frac{(k\lambda_D)^{-2}}{2}\right]$$

Va a 0 más rápido que cualquier potencia de k

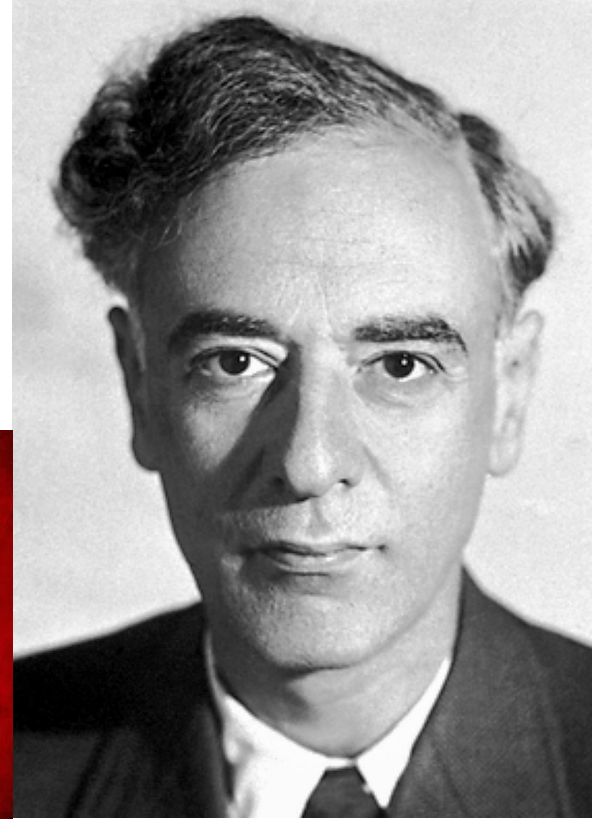
Surge la longitud de Debye, que es la **distancia de apantallamiento de la interacción electrostática**

$$\frac{v_T}{\omega_p} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \sqrt{\frac{\epsilon_0 m}{e^2 n_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n_0}} \equiv \lambda_D$$



Anatoli Vlasov (1908-1975)

**¡Gracias!  
¿Preguntas?**



Lev Davidóvich Landáu (1908-1968)

# Linealización de Landau: Fourier

Cómo el sistema es lineal, podemos transformar Fourier  $f_1$  y  $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \longrightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = 0 \implies \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = E(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{k}} \quad \text{Perturbación longitudinal}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{eN}{\epsilon_0} \int f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \longrightarrow i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = -\frac{eN}{\epsilon_0} \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial t}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) - \frac{e}{m_e} E(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad E(\mathbf{k}, t) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}})} = \frac{\partial f_0}{\partial u}$$

Las componentes de  $\mathbf{v}$  perpendiculares a  $\mathbf{k}$  no participan en la evolución, las direcciones están desacopladas. Expresamos  $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_\perp$

# Linealización de Landau: Laplace

Integrando las componentes perpendiculares de  $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_\perp$  y reemplazando en las ecuaciones  $\longrightarrow$

$$F_0(u) = \int f_0(\mathbf{v}) d^2 v_\perp$$
$$F_1(\mathbf{k}, u, t) = \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d^2 v_\perp$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{k}, u, t) + ikuF_1(\mathbf{k}, u, t) - \frac{e}{m_e} E(\mathbf{k}, t) F_0'(u) = 0 \quad E(\mathbf{k}, t) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int F_1(\mathbf{k}, u, t) du$$

Finalmente, transformamos Laplace en el tiempo ambas ecuaciones

$$\int_0^\infty \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t}(\mathbf{k}, u, t) + ikuF_1(\mathbf{k}, u, t) - \frac{e}{m_e} E(\mathbf{k}, t) F_0'(u) \right] e^{-st} dt = 0$$

$$s\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) + iku\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) - \frac{e}{m_e} \tilde{E}(\mathbf{k}, s) F_0'(u) = F_1(\mathbf{k}, u, 0)$$
$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int \tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) du$$

# Linealización de Landau: Campo eléctrico

Despejando

$$\tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) = \frac{1}{s + iku} \left[ F_1(\mathbf{k}, u, 0) + \frac{e}{m_e} \tilde{E}(\mathbf{k}, s) F_0'(u) \right]$$
$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int \tilde{F}_1(\mathbf{k}, u, s) du$$

Podemos resolver el sistema lineal para obtener el campo eléctrico

$$\tilde{E}(\mathbf{k}, s) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{k}, s)}{\mathcal{D}(\mathbf{k}, s)} \quad \text{con}$$
$$\mathcal{N}(\mathbf{k}, s) = i \frac{eN}{k\epsilon_0} \int \frac{F_1(\mathbf{k}, u, 0)}{s + iku} du$$
$$\mathcal{D}(\mathbf{k}, s) = 1 - i \frac{\omega_p^2}{k} V \int \frac{F_0'(u)}{s + iku} du$$

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m V} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m}$$

Frecuencia de plasma

Invertimos Laplace

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{E}(\mathbf{k}, s) e^{st} ds = \sum_{\text{Polos del integrando } s_p} \underbrace{\text{Res} \left[ \tilde{E}(\mathbf{k}, s), s_p \right]}_{\text{Residuo en } s_p} e^{s_p t}$$