

Propagación de ondas Electromagnéticas en medios aleatorios

Julián Villa

Temas Avanzados de Termodinámica y Física Estadística
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

October 16, 2020

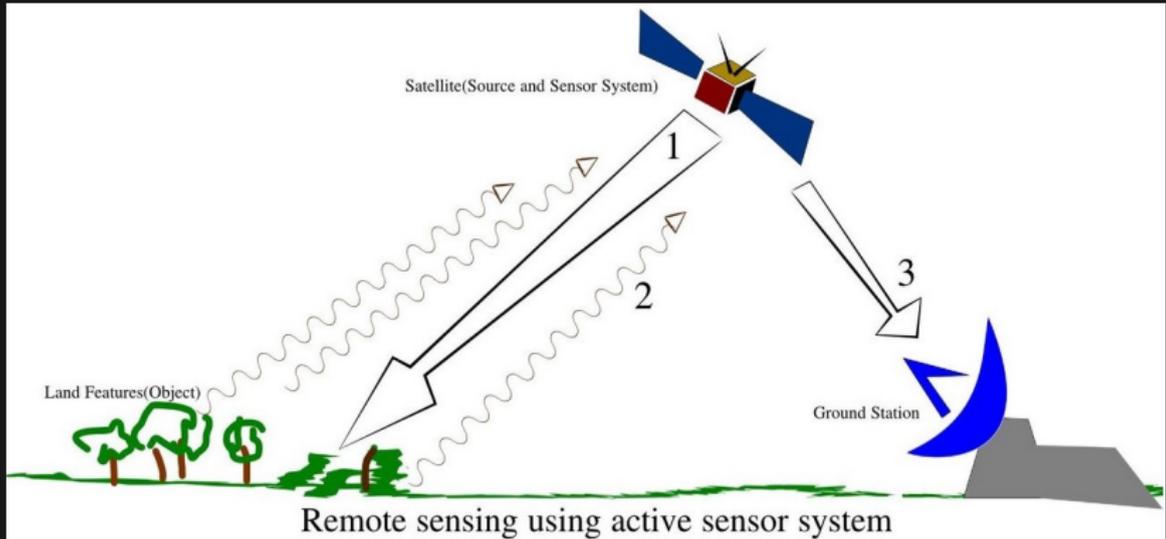
Lugar de Trabajo

Grupo de Teledetección Cuantitativa - Instituto de Astronomía y Física del Espacio (UBA-CONICET).



Tesis doctoral bajo dirección de: Dr. Mariano Franco.

Presentación del problema



Este problema solo puede describirse en términos estadísticos. Se modela mediante una constante dieléctrica del medio aleatoria.

La potencia que recibe el sensor del satélite queda completamente caracterizada por $\langle \bar{E}(\vec{r}) \rangle$ y $\langle \bar{E}(\vec{r}) \bar{E}^*(\vec{r}') \rangle$.

De Maxwell a Dyson

El problema a resolver está dado por,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\vec{r}) - \omega^2 \mu \epsilon(\vec{r}) \bar{E}(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

donde $\epsilon = \langle \epsilon \rangle + \epsilon_0 f(\vec{r})$, con $\epsilon_0 f(\vec{r})$ variable gaussiana centrada. Reemplazando,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\vec{r}) - \omega^2 \mu \langle \epsilon \rangle \bar{E}(\vec{r}) = Q(\vec{r}) \bar{E}(\vec{r}) \quad (2)$$

con $Q(\vec{r}) = \omega^2 \mu \epsilon_0 f(\vec{r})$.

$Q(\vec{r}) \bar{E}(\vec{r})$ puede pensarse como una corriente $\vec{j}(\vec{r})$ y pasar al formalmente problema inhomogéneo.

Funciones de Green

Si encuentro $\bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}')$ que cumpla,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') - \omega^2 \mu \epsilon(\bar{r}) \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{r} - \bar{r}'), \quad (3)$$

puedo calcular el campo dispersado mediante la ecuación:

$$\bar{E}^s = \int d\bar{r}' \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') \bar{j}(\bar{r}') = \int d\bar{r}' \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') Q(\bar{r}') \bar{E}(\bar{r}'). \quad (4)$$

$\bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}')$ es la diada de Green. Para el caso homogéneo, $\epsilon = \langle \epsilon \rangle$, su valor es:

$$\bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}') = \left(\bar{\bar{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \frac{e^{ik|\bar{r} - \bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|}, \quad (5)$$

con $k = \omega \sqrt{\mu \langle \epsilon \rangle}$.

Puedo escribir $\bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}')$ en términos de $\bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}')$:

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') - \omega^2 \mu \langle \epsilon \rangle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{r} - \bar{r}') + Q(\bar{r}) \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') \\ \nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}') - \omega^2 \mu \langle \epsilon \rangle \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{cases}$$

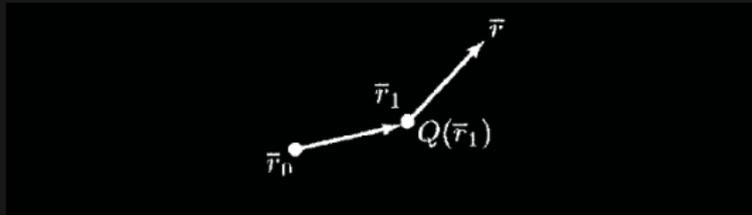
$$\implies \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}') + \int d\bar{r}_1 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot Q(\bar{r}_1) \bar{\bar{G}}(\bar{r}_1, \bar{r}')$$

Iterando generamos la serie de Neumann,

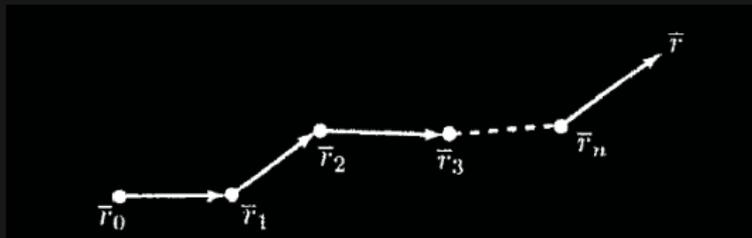
$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}') &= \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}') + \int d\bar{r}_1 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot Q(\bar{r}_1) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}') \\ &+ \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot Q(\bar{r}_1) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot Q(\bar{r}_2) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_2, \bar{r}') \\ &+ \dots + \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \dots d\bar{r}_n \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot Q(\bar{r}_1) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot Q(\bar{r}_2) \\ &\bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_2, \bar{r}_3) \dots \cdot Q(\bar{r}_n) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_n, \bar{r}') + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

El primer término de la serie perturbativa (6) es la aproximación a orden cero y corresponde a la solución homogénea, en la que no hay scattering.

El siguiente término corresponde a la aproximación de Born, en el que se considera un solo proceso dispersivo.



El término n -ésimo término representa un proceso en el que la onda incidente se dispersa n veces.



Valores medios de la función de Green

En nuestra formulación es necesario calcular valores medios del campo y su cuadrado: $\langle \bar{E}(\bar{r}) \rangle$ y $\langle \bar{E}(\bar{r}) \bar{E}^*(\bar{r}') \rangle$.

Esto se traduce a calcular valores medios de la función de green y su cuadrado: $\langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle$ y $\langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \bar{G}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle$.

Para ello es útil recordar que $\epsilon_0 f(\bar{r})$, y por lo tanto $Q(\bar{r})$, son variables gaussianas centradas y vale para n entero:

$$\langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_2) \dots Q(\bar{r}_{2n+1}) \rangle = 0 \quad (7)$$

$$\langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_2) \dots Q(\bar{r}_{2n}) \rangle = \sum_{\text{parejas}} \langle Q(\bar{r}_i) Q(\bar{r}_j) \rangle \dots \langle Q(\bar{r}_p) Q(\bar{r}_s) \rangle \quad (8)$$

Utilizando lo anterior en la expansión (6), y teniendo en cuenta que $\langle \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle = \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0)$, llegamos a la ecuación de Dyson:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle &= \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) \\
 &+ \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot \bar{\bar{G}}^0(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot \bar{\bar{G}}^0(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_2) \rangle \\
 &+ \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3 d\bar{r}_4 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot \bar{\bar{G}}^0(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot \bar{\bar{G}}^0(\bar{r}_2, \bar{r}_3) \cdot \bar{\bar{G}}^0(\bar{r}_3, \bar{r}_4) \\
 &\times [\langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_2) \rangle \langle Q(\bar{r}_3) Q(\bar{r}_4) \rangle + \langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_3) \rangle \langle Q(\bar{r}_2) Q(\bar{r}_4) \rangle + \\
 &\langle Q(\bar{r}_1) Q(\bar{r}_4) \rangle \langle Q(\bar{r}_2) Q(\bar{r}_3) \rangle] + \dots \quad (9)
 \end{aligned}$$

De éste modo el valor medio de la función de green queda expresada en potencias de la función de correlación del medio y de la función de green del problema homogéneo.

Diagramas de Feynman

Es conveniente expresar la ecuación (9) de forma diagramática haciendo uso de las siguientes equivalencias:

$$\text{————} = \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0); \quad \text{~~~~~} = \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle; \quad \text{⤴} = \langle Q(\bar{r}_1)Q(\bar{r}_2) \rangle$$

Por ejemplo:

$$\text{⤴} = \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \cdot \bar{G}^0(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot \bar{G}^0(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \times \langle Q(\bar{r}_1)Q(\bar{r}_2) \rangle$$

La ecuación de Dyson queda representada como:

$$\text{~~~~~} = \text{————} + \text{⤴} + \left[\text{⤴} + \text{⤴} + \text{⤴} + \text{⤴} \right] + \dots$$

Diagramas irreducibles y Operador de masa

En la expresión diagramática de la Ec. de Dyson existen dos tipos de diagramas:



Los diagramas reducibles puede escribirse como productos de diagramas irreducibles conectados por un propagador.

Es posible escribir la ecuación de Dyson de forma más compacta si definimos un operador que contenga todos los diagramas irreducibles: el operador de masa \bar{Q} .

$$\otimes = \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} + \dots$$

Diagrama 1: un arco simple.
Diagrama 2: dos arcos superpuestos.
Diagrama 3: un arco grande con un arco pequeño dentro.

El primer diagrama reducible se obtiene multiplicando dos veces el diagrama irreducible anterior.

La ecuación de Dyson en términos de diagramas del operador de masa resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{wavy line} &= \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{straight line} + \dots \\
 &= \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \left[\text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{straight line} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Si reescribimos el último factor de forma recurrente:

$$\text{wavy line} = \text{straight line} + \text{straight line} \text{---} \textcircled{\times} \text{---} \text{wavy line}$$

Lo que es equivalente a la siguiente ecuación analítica:

$$\langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle = \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) + \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \bar{\bar{Q}}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \rangle \quad (10)$$

Bethe-Salpenter

Resta encontrar una expresión para $\langle G(\bar{r}, \bar{r}_0)G^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle$. Se calcula realizando el producto de las series de Neumann correspondientes y tomando valor medio.

$$\begin{aligned} \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0)\bar{G}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle &= \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0)\bar{G}^{(0)*}(\bar{r}', \bar{r}'_0) \\ &+ \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) \int d\bar{r}'_1 d\bar{r}'_2 \bar{G}^{(0)*}(\bar{r}', \bar{r}'_1)\bar{G}^{(0)*}(\bar{r}'_1, \bar{r}'_2)\bar{G}^{(0)*}(\bar{r}'_2, \bar{r}'_0) \\ &\times \langle Q^*(\bar{r}'_1)Q^*(\bar{r}'_2) \rangle \\ &+ \bar{G}^{(0)*}(\bar{r}', \bar{r}'_0) \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1)\bar{G}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)\bar{G}^{(0)}(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \\ &\times \langle Q(\bar{r}_1)Q(\bar{r}_2) \rangle + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Diagramas para Bethe-Salpeter

A las equivalencias entre términos y diagramas agregamos,



$$= \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \bar{G}^{I*}(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle$$

De la ecuación (11) surgen tres tipos de diagrama:



- ▶ Los que involucran funciones de correlación entre puntos de una sola función de Green.
- ▶ Los que involucran funciones de correlación entre puntos de distintas funciones de Green, pero cuyas líneas internas no se cruzan.
- ▶ Los que poseen líneas internas que se cruzan entre sí (Irreducibles).

Operador Intensidad

Siguiendo el mismo esquema que antes, se puede definir un operador que contenga las sumas de todos los diagramas irreducibles, a través del cuál se puede escribir la ecuación de Bethe-Salpeter de forma compacta:

$$\text{BS} = \text{wavy lines} + \text{wavy line} \text{---} \text{I} \text{---} \text{BS}$$

Que es equivalente a la ecuación analítica:

$$\begin{aligned} \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \bar{G}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle &= \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle \langle \bar{G}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle \\ &+ \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r}'_1 d\bar{r}'_2 \langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_1) \rangle \langle \bar{G}^*(\bar{r}', \bar{r}'_1) \rangle \bar{I}(\bar{r}_1, \bar{r}_2; \bar{r}'_1, \bar{r}'_2) \\ &\times \langle \bar{G}(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \bar{G}^*(\bar{r}'_2, \bar{r}'_0) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

Aproximaciones para la ecuación de Dyson

Aproximación Bilocal

Me quedo con el primer término del operador de masa.

$$\text{Diagrama con } \otimes \approx \text{Diagrama con arco} \quad \bar{Q}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \approx C(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \bar{G}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$$

Bajo esta aproximación la ecuación de Dyson resulta, en términos de diagramas:

$$\text{Diagrama con onda} = \text{Diagrama con línea} + \text{Diagrama con línea y arco y onda}$$

Iterando, vemos que solo obtenemos productos del término bilocal:

$$\text{Diagrama con onda} = \text{Diagrama con línea} + \text{Diagrama con línea y arco} + \text{Diagrama con línea y dos arcos} + \dots$$

El desarrollo diagramático anterior es equivalente a la ecuación analítica:

$$\langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle = \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) + \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \bar{\bar{G}}^{(0)}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \cdot \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \rangle C(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \quad (13)$$

A pesar de que la aproximación bilocal es la más simple que se puede dar, la ecuación de Dyson sigue siendo una ecuación integral.

Esta aproximación impone la restricción de que la varianza de las fluctuaciones del medio sea pequeña. Equivale a decir que que la permitividad dieléctrica del medio no difiera mucho de la permitividad de sus inhomogeneidades. Esto es un gran limitante en las aplicaciones reales.

Aproximación No lineal

La siguiente aproximación posible es hacer que el operador de masa dependa de la función de green del problema real. Para ello lo reescribimos considerando el siguiente operador:

$$\text{wavy line} = \text{arc} + \text{two arcs} + \text{three arcs} + \dots$$

El operador de masa se puede reescribir como potencias de este operador:

$$\text{circle with X} = \text{wavy line} + \text{two wavy lines with arcs} + \dots$$

Con el operador de masa escrito en potencias del operador No lineal, trunco la serie en el primer término como aproximación:

$$\textcircled{\times} \approx \text{---} \text{---} \text{---} \quad \bar{Q}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \approx C(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \langle \bar{G}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \rangle$$

De modo que la ecuación diagramática de Dvson resulta:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---}$$

Que se traduce en la siguiente ecuación analítica,

$$\langle \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle = \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_0) + \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \bar{G}^{(0)}(\bar{r}, \bar{r}_1) \langle \bar{G}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \rangle \cdot \langle \bar{G}(\bar{r}_2, \bar{r}_0) \rangle C(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \quad (14)$$

Al resumar el operador de masa con productos de diagramas cuyas líneas internas no se cruzan obtengo una ecuación no lineal.

Aproximaciones para la ecuación de BS

Aproximación escalera o *ladder*

Al igual que el operador de masa, el operador intensidad viene dado como una suma de infinitos términos. Las aproximaciones a la ecuación de Bethe-Salpeter, como las de la ecuación de Dyson, surgen de truncar dicha suma. La aproximación más simple es:

$$\bar{\bar{I}}(\bar{r}_1, \bar{r}_2; \bar{r}'_1, \bar{r}'_2) \approx \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\delta(\bar{r}'_1 - \bar{r}'_2)C(\bar{r}_1 - \bar{r}'_1)$$

Reemplazando en la ecuación de Bethe-Salpeter:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_0) \bar{\bar{G}}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle &= \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_0) \rangle \langle \bar{\bar{G}}^*(\bar{r}', \bar{r}'_0) \rangle \\ &+ \int d\bar{r}_1 d\bar{r}'_1 \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}, \bar{r}_1) \rangle \langle \bar{\bar{G}}^*(\bar{r}', \bar{r}'_1) \rangle C(\bar{r}_1 - \bar{r}'_1) \\ &\times \langle \bar{\bar{G}}(\bar{r}_1, \bar{r}_0) \bar{\bar{G}}^*(\bar{r}'_1, \bar{r}'_0) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

Redondeando un poco...

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell obtuvimos ecuaciones perturbativas para los dos primeros momentos del campo: Ecuación de Dyson y de Bethe-Salpenter, respectivamente.

Resumando los diagramas de estas, redujimos los desarrollos perturbativos a ecuaciones integrales.

Truncando las sumas de infinitos diagramas en los operadores de masa e intensidad, obtuvimos dos aproximaciones para la ecuación de Dyson, bilocal y no lineal, y una aproximación para la ecuación de BS, *ladder approximation*.

Restaría obtener una expresión cerrada para los dos primeros momentos del campo eléctrico.

Muchas Gracias