Turbulencia aleatoria y Teoría K41

Temas Avanzados de Termodinámica y Física Estadística - 2°c 2020

Christian Reartes

4 de Diciembre de 2020

Introducción

- El fenómeno de la turbulencia es ubicuo en una gran variedad de flujos.

- Una de sus principales características es la eficiencia para transportar y mezclar cantidades que son arrastradas por el fluido.

- La turbulencia es un sistema fuera del equilibrio.

Naturaleza aleatoria de la turbulencia

En un flujo turbulento, el campo de velocidad U(x,y,z,t) es aleatorio. ¿Qué significa esta declaración?

- Considere un experimento que puede repetirse muchas veces bajo un conjunto específico de condiciones C, y considere un evento A como A = {U < 10 m/s},
- Si el evento A ocurre inevitablemente, entonces A es cierto o seguro.
- Si el evento A no puede ocurrir, entonces es imposible.
- La tercera posibilidad es que A puede ocurrir pero no necesariamente ocurra.

Naturaleza determinista de la mecánica clásica

Si las ecuaciones de movimiento son deterministas, ¿por qué las soluciones son aleatorias?

- En cualquier flujo turbulento hay, inevitablemente, perturbaciones en las condiciones de contorno y propiedades del material.

- Los campos de flujo turbulento muestran una aguda sensibilidad ante condiciones iniciales.

Caos determinista

$$\dot{x} = a(y - x)$$
$$\dot{y} = \mu x - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Atractor de Lorenz

- Modelo simplificado para la convección de la atmósfera.
- Sistema de 3 ODE.
- 3 variables: x, y, z.
- 3 parámetros: a, μ, b.

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$$

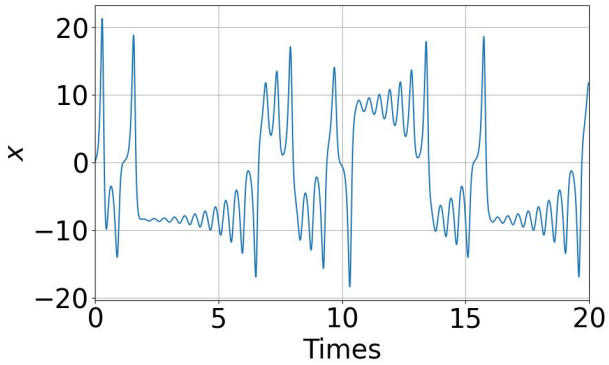
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes incompresible

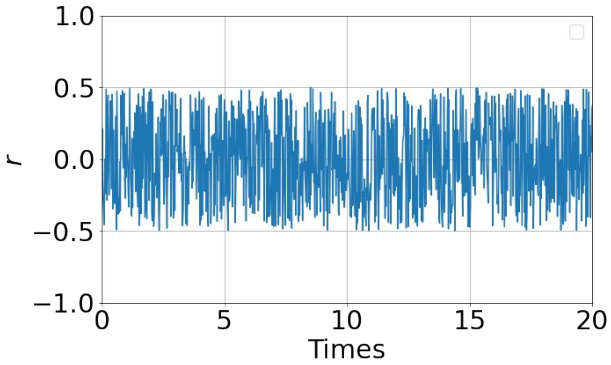
- Sistema de 4 PDE.
- 4 variables: $\underline{\mathbf{u}}$ y p.
- 1 parámetros: Re.

Caos determinista

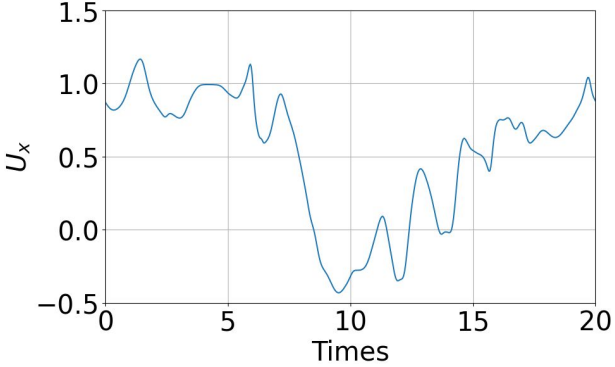
Atractor de Lorenz



Proceso aleatorio



Navier-Stokes (Turbulencia)

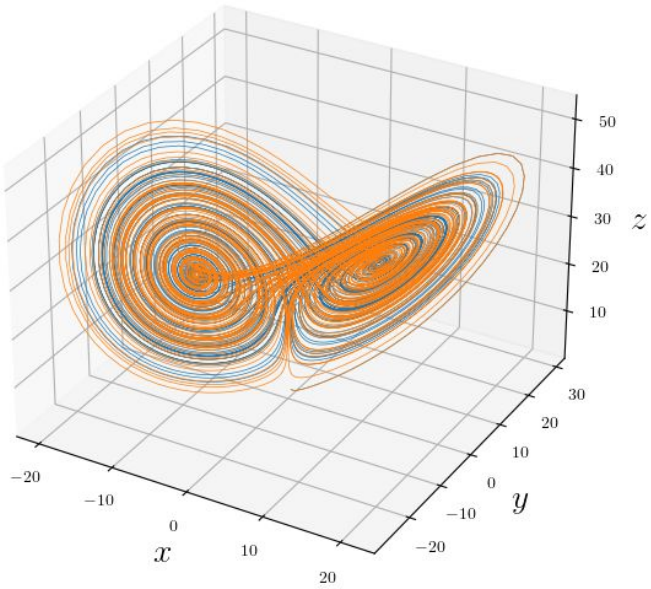


Caos determinista

Diagrama de fase del atractor de Lorenz

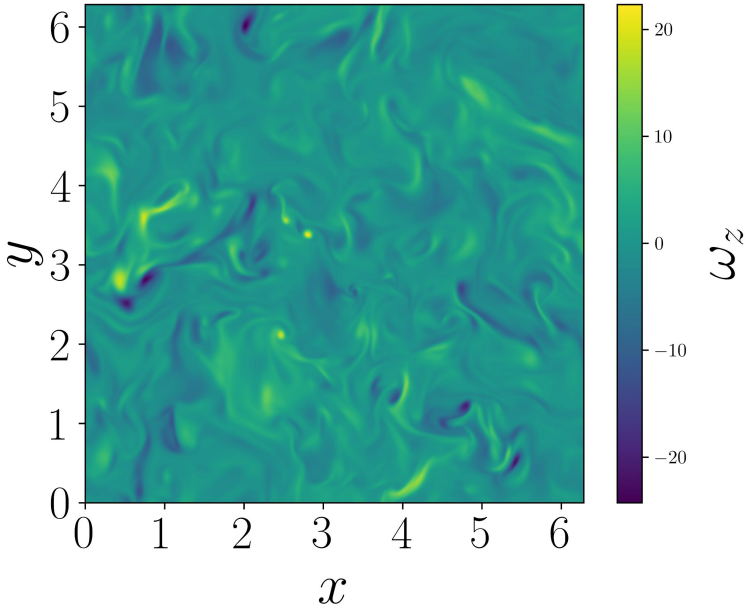
Celeste: r_0 =(1, 1, 1)

Naranja: r_0 =(1.000001, 1, 1)

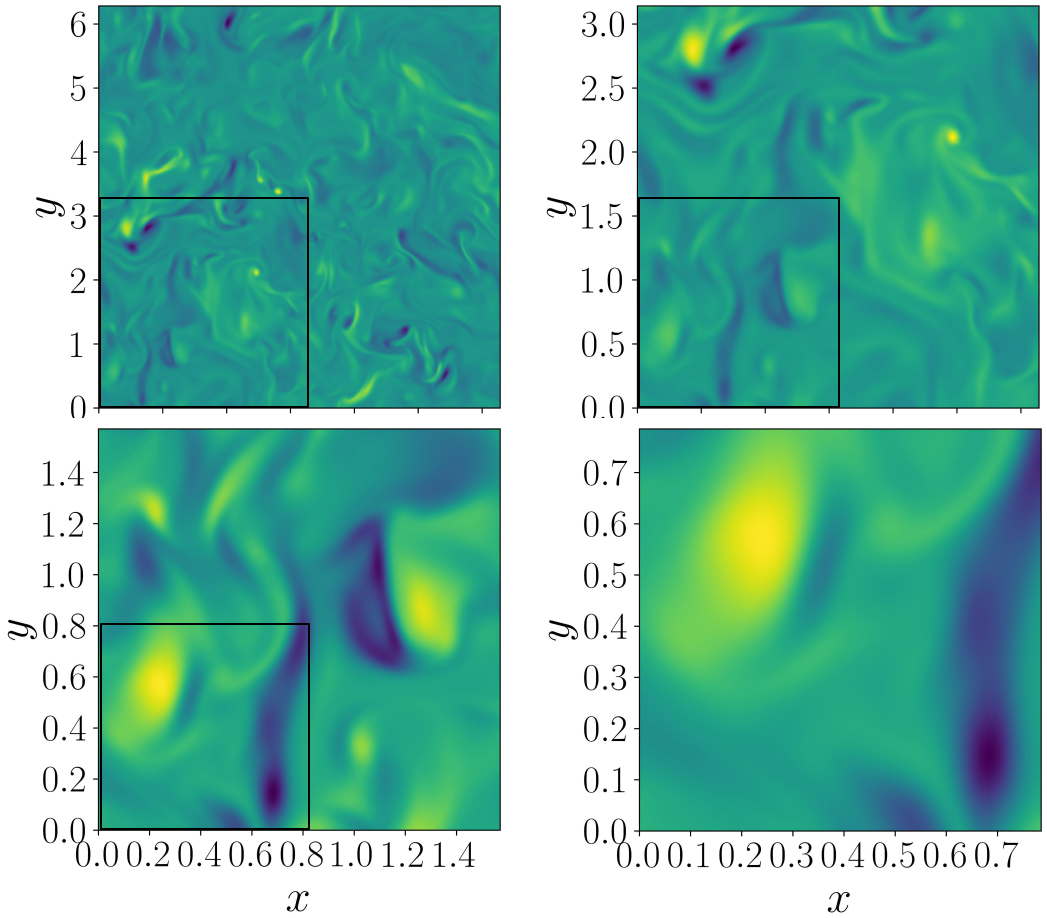


Campo de vorticidad de un flujo turbulento

$$\nabla \times \mathbf{u}$$



Turbulencia hidrodinámica



$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$$

512^3 puntos de grilla

Turbulencia hidrodinámica

Podemos realizar la transformada de fourier de N-S

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

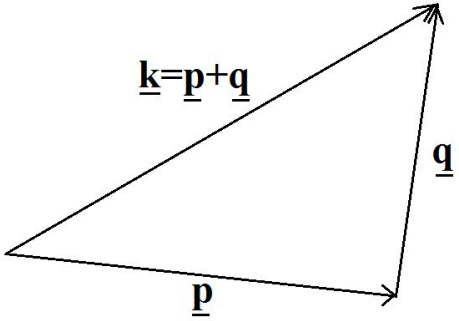
$$\partial_t \mathbf{v}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot i\mathbf{q})\, \mathbf{v}_{\mathbf{q}} = -i\mathbf{k} p_{\mathbf{k}} - \frac{k^2}{Re} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$$

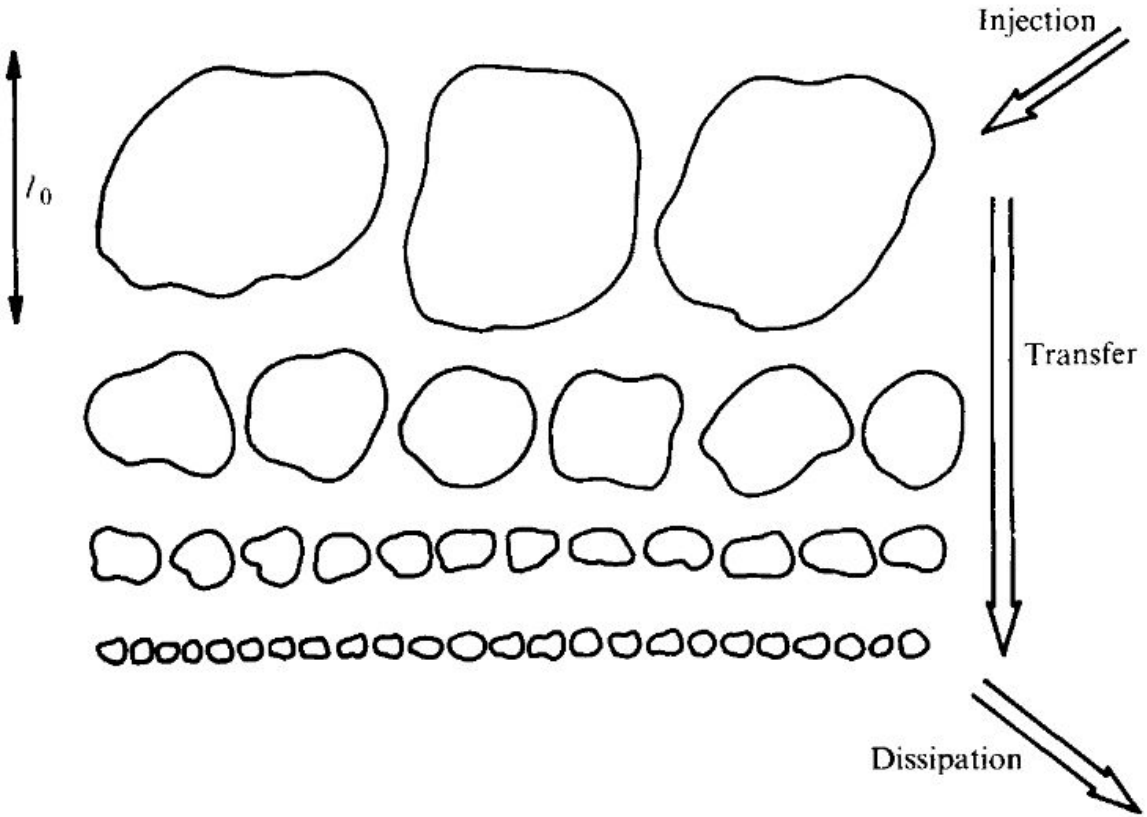
Turbulencia hidrodinámica

Siempre hay transferencia entre grupo de 3 nodos / p + q = k

$$\partial_t \mathbf{v_k} + \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\mathbf{v_p} \cdot i\mathbf{q})\, \mathbf{v_q} = -i\mathbf{k} p_\mathbf{k} - \frac{k^2}{Re} \mathbf{v_k}$$



Cascada de Richardson



Escalas características de la turbulencia

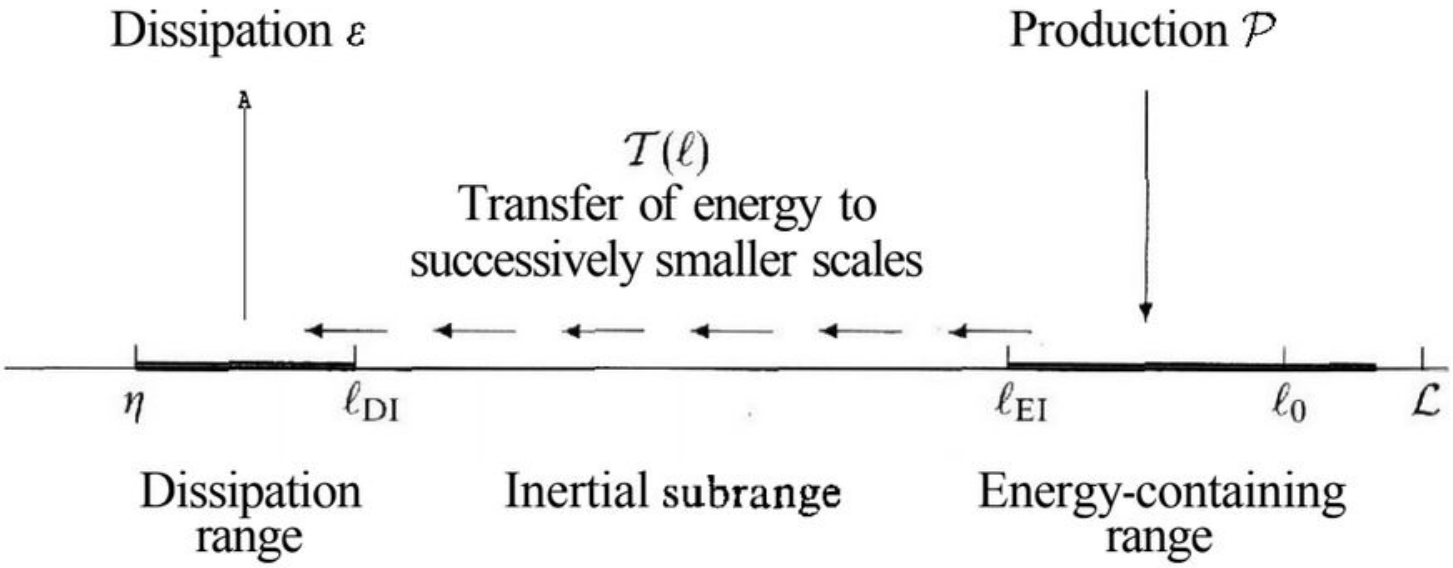
Observaciones experimentales:

- Escala integral (l_0) => $$l_0 = 2\pi \frac{\int_0^\infty k^{-1} E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}$$

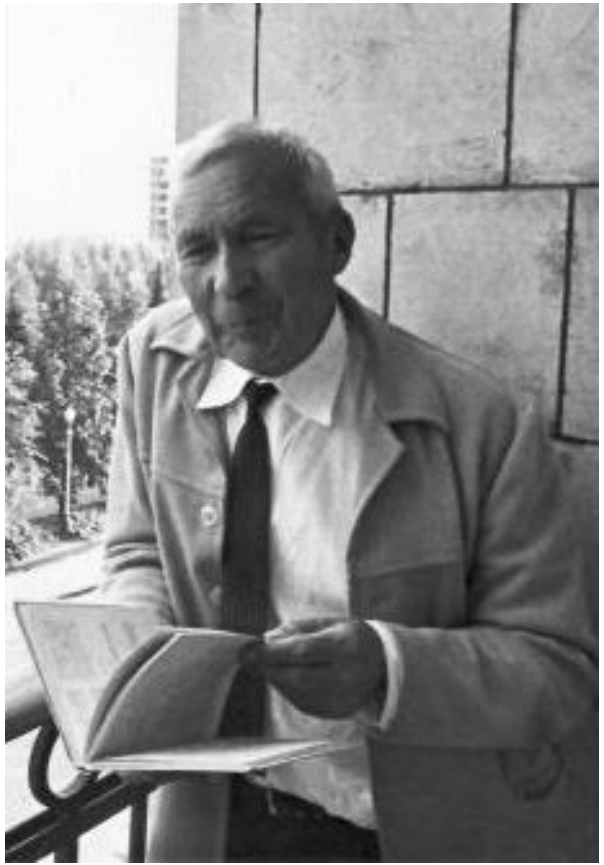
- Escala de disipación de energía (η)

- Rango inercial ($\eta \ll l \ll l_0$)

Escalas características de la turbulencia



Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)



Andreí
Kolmogorov
(1903-1987)

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Hipótesis de universalidad

En el límite de Re >>1, a pequeñas escalas y lejos de los contornos del sistema, todas las simetrías posibles de la ecuación de Navier-Stokes son restauradas en un sentido estadístico.

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Autosimilaridad del flujo

Bajo la primer hipótesis, el flujo turbulento es auto-similar a pequeñas escalas. Dentro del rango inercial, las propiedades del flujo serán invariantes ante cambios de escala, a menos de un factor de escala con un único exponente de escala.

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Disipación de energía finita

Bajo las mismas hipótesis que en el primer punto, el flujo turbulento tiene una tasa media de disipación de energía finita y no nula.

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Función de estructura

$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle = \left\langle \left[v(x-l) - v(x) \right]^2 \right\rangle$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Función de estructura

$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle = \left\langle \left[v(x-l) - v(x) \right]^2 \right\rangle$$

$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle = \left\langle v^2(x-l) \right\rangle + \left\langle v^2(x) \right\rangle + 2 \left\langle v(x-l) \cdot v(x) \right\rangle$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

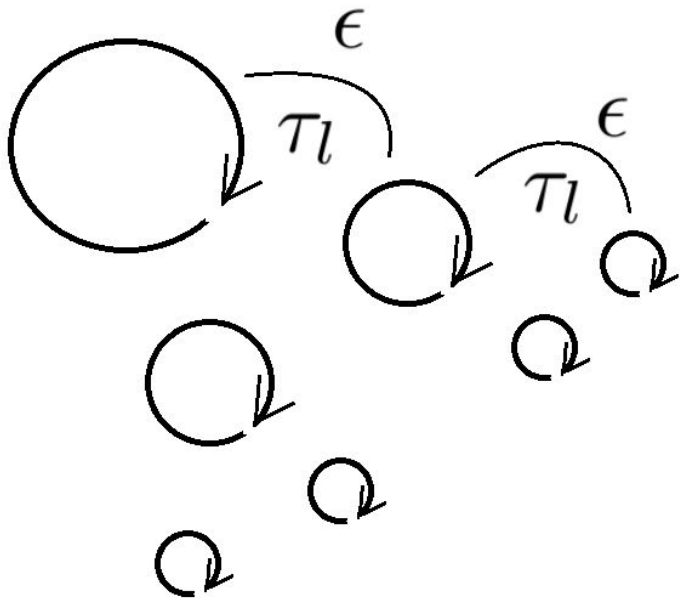
Función de estructura

$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle = \left\langle \left[v(x-l) - v(x) \right]^2 \right\rangle$$

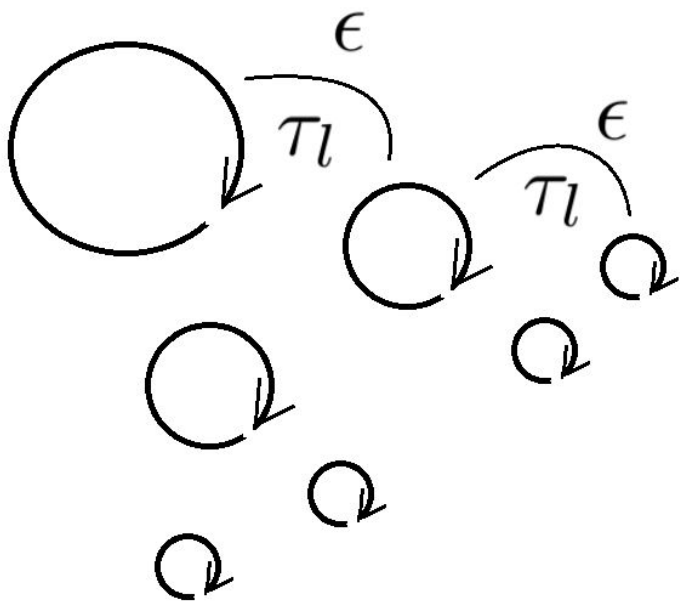
$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle = \left\langle v^2(x-l) \right\rangle + \left\langle v^2(x) \right\rangle + 2 \left\langle v(x-l) \cdot v(x) \right\rangle$$

$$\left\langle \delta v_l{}^2 \right\rangle \sim \left\langle v^2 \right\rangle$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

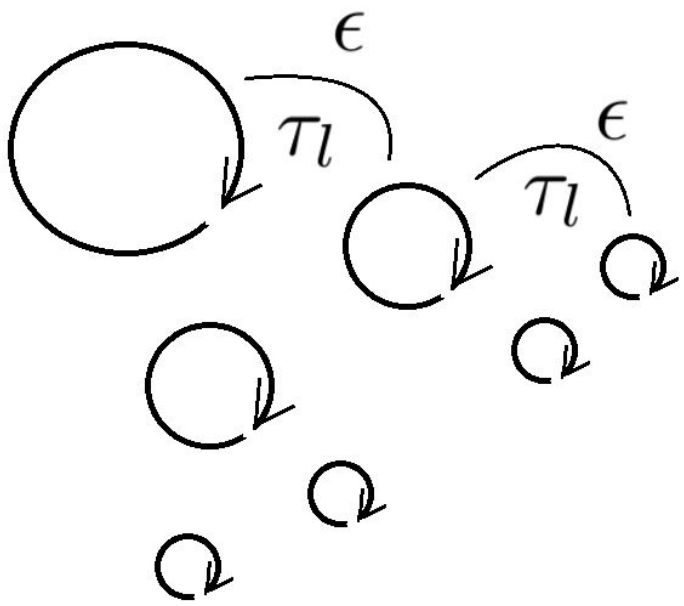


Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)



$$\epsilon \sim \frac{\delta v_l{}^2}{\tau_l}$$

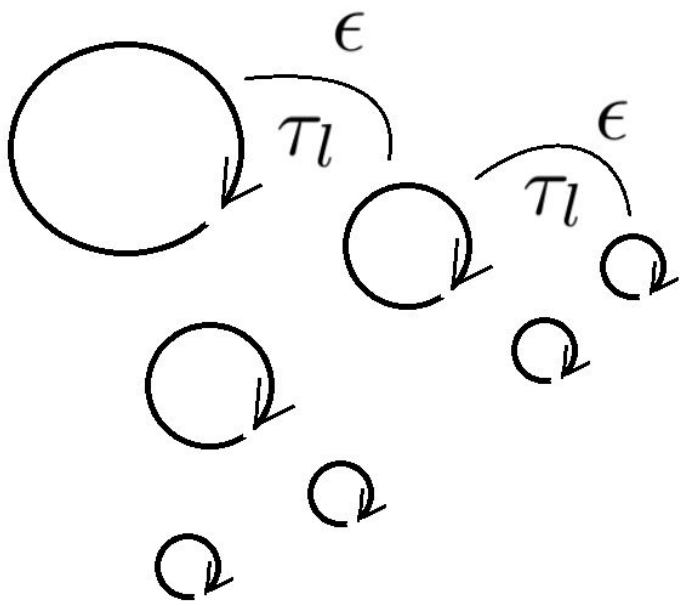
Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)



$$\epsilon \sim \frac{{\delta v_l}^2}{\tau_l}$$

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l}$$

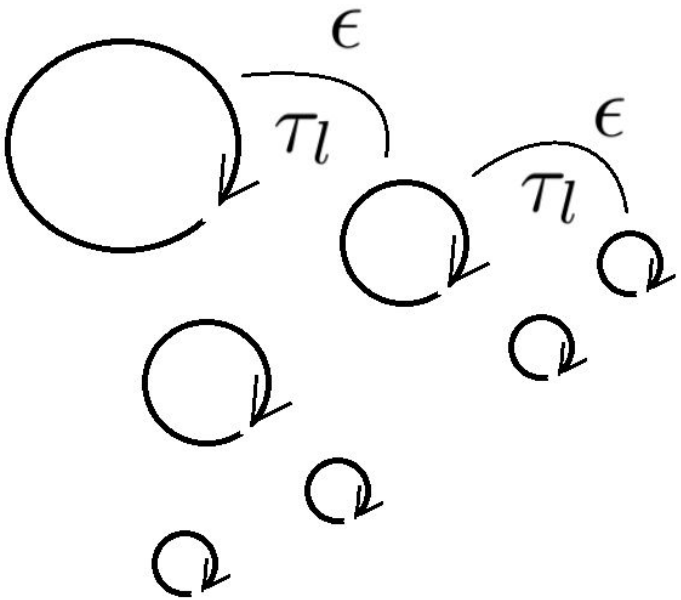
Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)



$$\epsilon \sim \frac{\delta v_l{}^2}{\tau_l} \qquad \tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l}$$

$$\epsilon \sim \frac{\delta v_l{}^3}{l}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)



$$\epsilon \sim \frac{{\delta v_l}^2}{\tau_l} \qquad \tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l}$$

$$\epsilon \sim \frac{{\delta v_l}^3}{l}$$

$$\boxed{{\delta v_l}^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}}$$

Ley de Richardson

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Espectro de energía

$$E(k) \sim \frac{dE}{dk} \sim \frac{\delta {v_l}^2}{k}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Espectro de energía

$$E(k) \sim \frac{dE}{dk} \sim \frac{\delta {v_l}^2}{k}$$

$$E(k) \sim \frac{\epsilon^{2/3} l^{2/3}}{k}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Espectro de energía

$$E(k) \sim \frac{dE}{dk} \sim \frac{\delta {v_l}^2}{k}$$

$$E(k) \sim \frac{\epsilon^{2/3} l^{2/3}}{k}$$

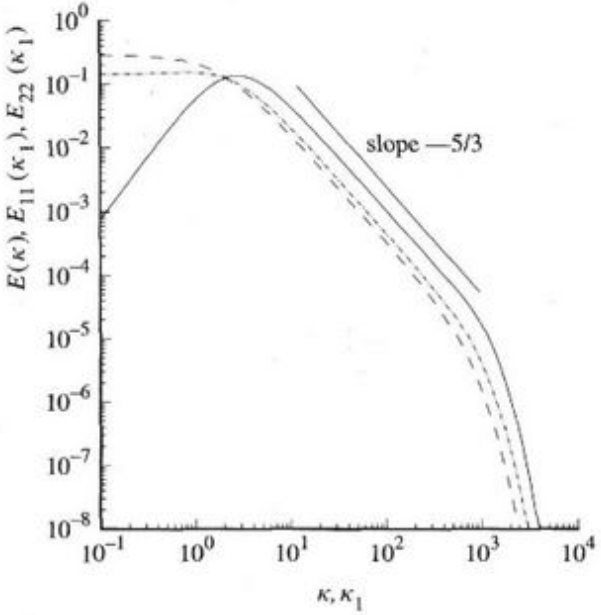
$$\boxed{E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}}$$

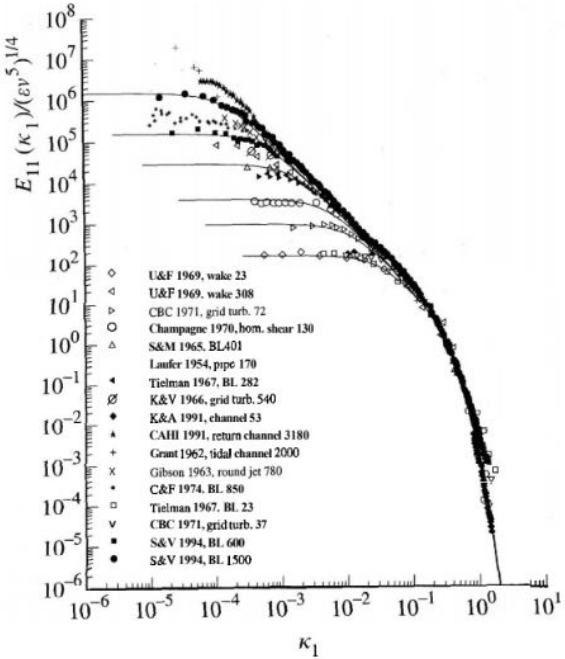
Espectro de Kolmogorov

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Espectro de energía de Kolmogorov

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$





Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Tiempos característicos

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Tiempos característicos

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l} \sim \frac{l}{\epsilon^{1/3} l^{1/3}}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Tiempos característicos

Tiempos característicos de la escala inercial

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l} \sim \frac{l}{\epsilon^{1/3} l^{1/3}} \longrightarrow \tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Tiempos característicos

Tiempos característicos de la escala inercial

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l} \sim \frac{l}{\epsilon^{1/3} l^{1/3}} \longrightarrow \tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

$$\frac{\delta v_l}{\tau_v} \sim \nu \frac{\delta v_l}{l^2}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Tiempos característicos

Tiempos característicos de la escala inercial

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta v_l} \sim \frac{l}{\epsilon^{1/3} l^{1/3}} \longrightarrow \tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

Tiempos viscoso

$$\frac{\delta v_l}{\tau_v} \sim \nu \frac{\delta v_l}{l^2} \longrightarrow \tau_v \sim \frac{l^2}{\nu}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Igualando los tiempos característicos en cada escala de disipación de energía

$$\tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

$$\tau_v \sim \frac{l^2}{\nu}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Igualando los tiempos característicos en cada escala de disipación de energía

$$\tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

$$\tau_v \sim \frac{l^2}{\nu}$$

$$\epsilon^{-1/3} \eta^{2/3} \sim \frac{\eta^2}{\nu}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Igualando los tiempos característicos en cada escala de disipación de energía

$$\tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

$$\tau_v \sim \frac{l^2}{\nu}$$

$$\epsilon^{-1/3} \eta^{2/3} \sim \frac{\eta^2}{\nu}$$

$$\boxed{\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Igualando los tiempos característicos en cada escala de disipación de energía

$$\tau_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

$$\tau_v \sim \frac{l^2}{\nu}$$

$$\epsilon^{-1/3} \eta^{2/3} \sim \frac{\eta^2}{\nu}$$

$$\boxed{\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}}$$

$$\boxed{k_\eta \sim \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Grados de libertad del sistema

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim L^3 \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{3/4}$$

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Grados de libertad del sistema

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim L^3 \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{3/4} \sim L^3 \frac{U^{9/4}}{\nu^{9/4} L^{3/4}}$$

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

$$\delta v_l{}^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Grados de libertad del sistema

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim L^3 \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{3/4} \sim L^3 \frac{U^{9/4}}{\nu^{9/4} L^{3/4}} \sim \left(\frac{UL}{\nu}\right)^{9/4}$$

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

$$\delta v_l{}^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}$$

Teoría de Kolmogorov de 1941 (K41)

Grados de libertad del sistema

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim L^3 \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{3/4} \sim L^3 \frac{U^{9/4}}{\nu^{9/4} L^{3/4}} \sim \left(\frac{UL}{\nu}\right)^{9/4}$$

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

$$\delta v_l{}^2 \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}$$

$$\boxed{N_{grados} \sim Re^{9/4}}$$

¡Gracias!