Entropía de Wald y dualidad-T

Jesús Alejandro Rodríguez

Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires (UBA)

11 de diciembre de 2020

Outline

1. Termodinámica de agujeros negros.
   - Más allá de relatividad general.
   - La entropía de Wald.
2. String theory in a nutshell.
   - Límite de bajas energías.
   - Supercuerdas y dualidades.
   - Dualidad-T.
3. Termodinámica de agujeros negros y dualidad-T.
4. Termodinámica de agujeros negros y Double Field Theory.
   - Double Field Theory.
   - Termodinámica de agujeros negros y Double Field Theory.

- Michell (1783) y Laplace (1796) proponen el concepto de *estrella oscura*.
- Objetos cuya velocidad de escape excede la velocidad de la luz
$$R_s \leq \frac{2GM}{c^2}\,.$$
- La idea no prosperó por esa época. Predominio de la teoría ondulatoria de la luz.

John Michell (1724-1793)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

- La acción $S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\sqrt{-g}R\,.$
- Ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0\,,$ donde:
  - $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $g = \det g_{\mu\nu}$.
  - R es el escalar de curvatura (escalar de Ricci).
  - $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,, \qquad R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}\,.$$

- Una solución es la métrica de Schwarzschild

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -\left(1-\frac{R_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2\,. \end{aligned}$$

- Soluciones a las ecuaciones de Einstein con singularidades.
    - Schwarzschild (1916): M; horizonte $R_s = 2GM/c^2$.
    - Kerr (1963): M, J; 2 horizontes.
    - Para Einstein-Maxwell (Q): Reissner-Nordström; Kerr-Newman.
- Son los objetos más simples y al mismo tiempo, más complejos que existen.
    - Simples: M, J, Q. Teorema de no-pelo.
    - Complejos: Gran entropía $\rightarrow$ muchos microestados con una estructura compleja.

- Obedecen leyes análogas a las leyes de la termodinámica.

Agujeros Negros	**Termodinámica**
Sobre el horizonte $\kappa = \text{const.}$	Para un cuerpo en equilibrio térmico, $T = \text{const.}$
La energía se conserva $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \mu dQ$	La energía se conserva $dE = TdS - PdV + \mu dN$
El área del horizonte nunca disminuye $\Delta A \geq 0$	La entropía nunca disminuye $\Delta S \geq 0$
Imposible alcanzar $\kappa = 0$	Imposible alcanzar $T = 0$

- Los agujeros negros clásicos no emiten radiación ($T = 0$).

- Mecánica cuántica→Radiación de Hawking.
- Esto da lugar a una interpretación consistente de las leyes de la mecánica de los agujeros negros en correspondencia con las leyes de la termodinámica

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}\,, \qquad S_{BH} = \frac{A}{4}\,.$$

- Emerge la complejidad de los agujeros negros.

- Las leyes de la mecánica de agujeros negros se obtuvieron a partir de características partículares de las soluciones y de la acción de Einstein-Hilbert.
- Generalización de las leyes de la mecánica de agujeros negros $\rightarrow$ procedimiento que sea independiente de la forma concreta de la acción.
- Primera mitad de los 90, R. Wald (J. Lee, V. Iyer,...).
- Introducen un formalismo geométrico para la primera ley de la mecánica de los agujeros negros compatible con teorías invariantes bajo difeomorfismos.
- Fórmula para la entropía: Entropía de Wald.

- La entropía de un agujero negro es la carga de Noether asociada a los difeomorfismos[1].
- Parte de una acción en D dimensiones, invariante bajo difeomorfismos $\nabla_{(\mu}\lambda_{\nu)} = 0$.
- Admite soluciones tipo agujero negro cuyo horizonte de eventos es un horizonte de Killing, con superficie Σ.
- Existe una corriente conservada $\mathrm{j} = \mathrm{d}Q$, con Q la carga de Noether asociada a la transformación de simetría (On-shell).

[1] [Wald, 93]

- Si, asociado a una traslación temporal se puede definir la energía $\mathcal{E}$.
- Se obtiene la expresión

$$\delta\mathcal{E} = \delta \int_{\Sigma} Q_t = \frac{\kappa}{2\pi}\delta S_{BHW} \,,$$

donde identifica la carga conservada con la entropía del agujero negro.

- Así, la entropía de Wald

$$S_{BHW} = 2\pi \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}} \epsilon^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\rho}\sqrt{h} d^{D-2}\Omega \,,$$

donde h es la métrica inducida sobre el horizonte y $\epsilon^{\mu\nu}$ es un vector binormal a dicha superficie.

En particular, para Schwarzschild se tiene

$$\epsilon^{rt} = \epsilon^{tr} = -1\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}} = \frac{1}{32}\left(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\right)\,.$$

$$\begin{aligned}
S_{BHW} &= 2\pi \int_{S^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}} \epsilon^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\rho}\sqrt{h}d^2\Omega \\
&= \frac{1}{16}\int_{S^2}\left(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\right)\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\lambda\rho}\sqrt{h}d^2\Omega \\
&= \frac{1}{4}\int_{S^2} g^{tt}g^{rr}\sqrt{h}d^2\Omega \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

String theory in a nutshell

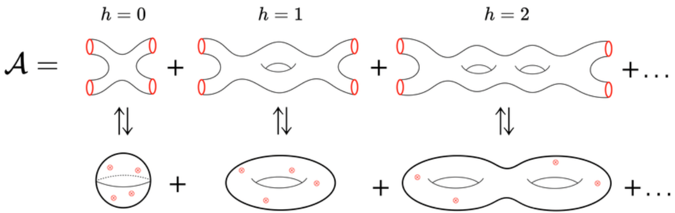
- Relatividad General (GR) describe clasicamente la gravedad a través de

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \ ,$$

  la acción de Einstein-Hilbert.
- Podemos acoplar materia adecuadamente.
- No es una teoría fundamental $\longrightarrow$ ¡Gravedad cuántica!
- Una opción es cuantizar GR. Sin embargo, la teoría resulta ser no renormalizable.
- Alternativas: Gravedad cuántica de lazos (LQG), teoría de cuerdas (ST),...

String theory in a nutshell

- Descripción cuántica de la cuerda relativista.
- La teoría fija la dimensión crítica ($D = 26$ o $D = 10$).
- Torre infinita de estados masivos.
- Espectro no masivo incluye partículas de spin 0, 1 y 2.
- Incluye fermiones $\longrightarrow$ Supersimetría.
- Provee una descripción cuántica de la gravedad consistente a nivel perturbativo.



String theory in a nutshell

- Conexión con la física observable requiere $10D \to 4D$.
- Compactificación de las dimensiones adicionales.
- La teoría admite MUCHAS soluciones consistentes $\sim 10^{10} \cdots 10^{500}$.
- Limitaciones en la descripción de: efectos no perturbativos, dinámica de cuerdas fuertemente acopladas, selección de variedades compactificadas.

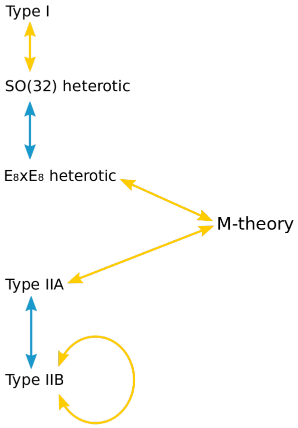
- El contenido de campos (bosónicos,cuerda cerrada) es: Tensor métrico $g_{\mu\nu}$, 2-forma de Kalb-Ramond $b_{\mu\nu}$ y el dilatón ϕ.
- La dinámica la dicta la acción efectiva

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^{10}\mathrm{x}\sqrt{-g}\left(R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right) ,$$

con g el determinante de la métrica, R el escalar de Ricci en 10 D y $H_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}b_{\nu\rho]}$.
- Correcciones perturbativas con parámetro $\alpha' = l_s^2$ (asociado a la tensión de la cuerda)

$$S = S_0 + \alpha' S_1 + \alpha'^2 S_2 + \cdots .$$

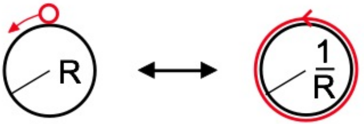
- Incluir fermiones requiere supersimetría.
- La dimensión crítica del espacio-tiempo es $D = 10$.
- Teoría de Supercuerdas.
- Existen 5 teorías de supercuerdas consistentes.
- Diferentes límites de una teoría en $11D$, la Teoría M.
- Una serie de dualidades las conecta.



- Sea un espacio-tiempo de D dimensiones con d dimensiones compactas. Una cuerda cerrada
  - Adquiere momento discreto $n_i, i = 1, \ldots, d$.
  - Se enrolla adquiriendo un número de enrollamiento w^i.
- Dualidad-T: Equivalencia entre teorías formuladas sobre geometrías diferentes.
- Ejemplo: Una cuerda cerrada con una dimensión compacta sobre un círculo de radio R. El espectro de masas

$$M^2 = (N + \tilde{N} - 2) + n^2 \frac{\alpha'}{R^2} + w^2 \frac{R^2}{\alpha'}$$

es invariante ante $n \leftrightarrow w$ y $R \leftrightarrow \alpha'/R$.



- Las transformaciones de dualidad son generadas por el grupo $O(d,d)$.
- Más dimensiones compactas $\rightarrow$ Reglas de Buscher. En la dirección k

$$g_{kk} \rightarrow \frac{1}{g_{kk}}\,, \qquad g_{ki} \rightarrow \frac{b_{ki}}{g_{kk}}\,, \qquad g_{ij} \rightarrow g_{ij} - \frac{g_{ki}g_{kj} - b_{ki}b_{bj}}{g_{kk}}\,,$$

$$b_{ki} \rightarrow \frac{g_{ki}}{g_{kk}}\,, \qquad b_{ij} \rightarrow b_{ij} - \frac{g_{ki}b_{kj} - b_{ki}g_{bj}}{g_{kk}}\,,$$

- Las dualidades deberían estar presentes en la descripción efectiva de la teoría de cuerdas.

- Puesto que dualidad-T es una simetría exacta de ST, se esperaría que las cantidades termodinámicas asociadas a agujeros negros sean invariantes de dualidad.
- Intuitivamente la entropía lo es. Geometrías asociadas a la descripción de grados de libertad microscopicos están relacionadas por dualidad.
- La entropía cuenta estos microestados.

- Horowitz y Welch verificaron la invariancia de la gravedad superficial y el área del horizonte de soluciones al límite de bajas energías de ST ante transformaciones de Buscher.
- Elgood y Ortín compactifican d dimensiones en la acción efectiva de la cuerda heterótica a orden α' y obtienen una acción manifiestamente invariante de dualidad. A partir de ahí, derivan una fórmula para la entropía de Wald invariante ante $O(d, d)$ con la que calculan la entropía de algunas soluciones singulares.
- Arvanitakis y Blair obtienen fórmulas de masa y entropía explícitamente invariantes de dualidad que satisfacen la primera ley de la termodinámica dentro del marco ofrecido por la teoría doble de campos.

- Dualidad T en una teoría de campos.
- Grupo de simetría: $O(D,D)$.
- Describe de manera efectiva el sector no masivo de la cuerda cerrada en D dimensiones
- Se duplica el número de coordenadas del espacio tiempo

$$X^M = (x^\mu, \tilde{x}_\mu)\,, \qquad M = 1, \ldots, D, D+1, \ldots, 2D\,,$$

siendo las coordenadas x^μ conjugadas al momentum n_μ y las coordenadas $\tilde{x}_\mu$, conjugadas al enrollamiento w^μ.
- Otras cantidades generalizadas

$$\mathcal{P}_M = (n_\mu, w^\mu)\,, \qquad \partial_M = (\partial_\mu, \widetilde{\partial}^\mu)\,.$$

- La acción de $O(D,D)$ preserva la métrica invariante del grupo

$$\eta_{MN} = h^{(\mathrm{T})P}_{M}\eta_{PQ}h^{Q}{}_{N}\,, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_d & 0 \end{pmatrix}$$

- Campos fundamentales: La métrica generalizada H_{MN} y el dilatón generalizado d.
- Invariancia ante difeomorfismos generalizados definidos según

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^N \partial_N V^M + \left(\partial^M \xi_N - \partial_N \xi^M\right) V^N + \omega(V)\partial_N \xi^N V^M\,.$$

- La clausura de los difeomorfismos generalizados nos conduce a

$$\partial_M \partial^M \cdots = 0\,, \qquad \partial_M \cdots \partial^M \cdots = 0\,,$$

denominado *strong constraint.*

Se puede escribir una acción de la forma

$$S_{DFT} = \frac{1}{16\pi G_{DFT}} \int \mathrm{d}^{2\mathrm{D}}\mathrm{X} e^{-2d} \mathcal{R}\,,$$

con $\mathcal{R}$ el escalar de Ricci generalizado, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \;=\; & 4H^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N H^{MN} - 4H^{MN}\partial_M d\partial_N d \\ & +4\partial_M H^{MN}\partial_N d + \frac{1}{8}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_N H_{KL} \\ & -\frac{1}{2}H^{MN}\partial_M H^{KL}\partial_K H_{NL} + \Delta_{(SC)}\mathcal{R}\,. \end{aligned}$$

- Una solución del strong constraint es $\partial_M = (\partial_\mu, 0)$.
- Junto a la parametrización

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho}b_{\rho\nu} \\ b_{\mu\rho}g^{\rho\nu} & g_{\mu\nu} - b_{\mu\rho}g^{\rho\lambda}b_{\lambda\nu} \end{pmatrix}, \qquad e^{-2d} = \sqrt{g}e^{-2\phi}.$$

- Se obtiene la acción efectiva de cuerdas

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^{10}\mathrm{x}\sqrt{-g}\left(R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right),$$

- Geometría doble, análoga a GR.
- Conexión Γ_{MNP} y tensores $\mathcal{R}_{MN}, \mathcal{R}_{MNPQ}$.
- El tensor de Riemann no está totalmente determinado. Dificultad para construir términos de orden superior en α'.

- Primera ley de la termodinámica en DFT,[2] siguiendo el método de Wald.
- DFT se basa en un principio de acción.
- Invariante ante difeomorfismos generalizados.
- Generalización del método,
  - Λ^M, parametro de difeomorfismos generalizado.
  - $\mathcal{J}^M$, corriente generalizada.
  - $\mathcal{Q}_{(\Lambda)}$, carga de Noether generalizada.

[2] [Arvanitakis, Blair, 2016]

- Exigiendo que
  - Se cumplan las ecuaciones de movimiento de d y de H_{MN},
  - Λ^M no dependa de d, H_{MN},
  - J^M transforme como un vector generalizado y que
  - Se satisfaga el strong constraint.
- Obtienen

$$\partial_N \mathcal{Q}^{MN} = 0\,,$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{MN} \;=\; & \Big(2\partial_N \Lambda^{[M} H^{P]N} + 2\partial^{[M}\Lambda_N H^{P]N} + 2\Lambda^N \partial^{[M} H^{P]}{}_N \\ & +2\Lambda^N H_{KN} H^{Q[M}\partial_Q H^{P]K} - H_N{}^Q H_K{}^{[M}\partial_Q H^{P]K} \\ & +2\partial_N H^{N[M}\Lambda^{P]} - 8\partial_N d H^{N[M}\Lambda^{P]}\Big)\;,\end{aligned}$$

la primera ley de la mecánica de agujeros negros generalizada.
- Determinación de Λ^M y $\mathcal{C}$.

- Parametrización de $O(D,D)$

$$X^M = (x^i, \tilde{x}_i, X^I) \qquad i = 1, \dots, D-d\,; I = 1, \cdots, d\,.$$

- Las componentes de la métrica generalizada

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= g_{ij} + g^{kl} C_{ik} C_{jl} + G_{IJ} A_i{}^I A_j{}^J \\
H_i{}^j &= -g^{jk} C_{ik} \\
H^{ij} &= g^{ij} \\
H^i{}_I &= -g^{ik} A_{kI} \\
H_{iI} &= G_{IJ} A_i^J + C_{ik} g^{kl} A_{lI} \\
H_{IJ} &= G_{IJ} + g^{kl} A_{kI} A_{lJ}\,,
\end{aligned}$$

con $C_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{2} A_i{}^I A_j{}^J G_{IJ}$.

- $\Lambda^M = (\xi^i, \lambda_i, \lambda^I)$.

Algunas condiciones

- g_{ij} es estática y asintóticamente plana.
- Los campos de gauge ${A_i}^I$ y b_{ij} se anulan en $R \to \infty$ y son independientes del tiempo.
- G_{IJ} es la métrica de Cartan-Killing.
- ξ^i es un vector de Killing similar al usado por Wald.

Con lo cual, llegan a las expresiones invariantes de $O(d,d)$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{16\pi G_{DFT}} \int_{R\to\infty} d^{D-2}x d^{2d}X \mathcal{Q}^{ij} \epsilon_{ij} \, , \\ S &= \frac{1}{4\pi G_{DFT}} \int_{R\to R_0} d^{D-2}x d^{2d}X e^{-2d} \sqrt{g_{(D-2)}} \, , \end{aligned}$$

que satisfacen

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S + \cdots \, . \tag{1}$$

¿Ir a orden α' en DFT?

- Construir términos de orden superior en α' no es fácil. El tensor de Riemmann generalizado no está totalmente determinado.
- Deformación de las transformaciones de Lorentz en el formalismo de flujos de DFT,[3].
- Simetría entre el campo de gauge y la conexión de spin generalizadas,[4].
- DFT parametriza adecuadamente el límite de bajas energías de la cuerda heterótica.
- Seguir la línea de los trabajos de Ortín partiendo desde DFT.

[3] [Marqués y Núñez, 2015].
[4] [Barón, Lescano y Marqués, 2018].

Algunas referencias

[1] R. M. Wald, *Black hole entropy is the Noether charge*, Phys. Rev. D48 (1993) 3427–3431, [gr-qc/9307038].
[2] A. Arvanitakis and C.Blair, *Black hole thermodynamics, stringy dualities and double field theory*, Class. Quant. Grav. 34 (2017) 055001, [hep-th/1608.04734].
[3] G. Aldazabal, D. Marques and C. Núnez, *Double Field Theory: A Pedagogical Review*, Class. Quantum Grav. 30 (2013) 163001, [hep-th/1305.1907].