Cristales de Tiempo

November 2, 2023

1 Introducción

Un *cristal de tiempo* [1, 2] es un sistema de muchos cuerpos en que la simetría de traslaciones en el tiempo está espontáneamente rota. Es decir, aunque el Hamiltoniano del sistema es invariante frente a traslaciones en el tiempo, el estado del sistema sólo presenta una invariancia discreta, es decir, el sistema evoluciona de una manera periódica.

Con esta definición, los cristales de tiempo no existen, o al menos no se conocen sistemas que presenten este comportamiento ya sea en su estado fundamental o en estados de equilibrio térmico. Sin embargo, sí hay sistemas que presentan una gran sensibilidad frente a perturbaciones periódicas, estableciéndose en una evolución estable cuyo período no es necesariamente el de la perturbación. Estos sistemas, llamados *cristales de Floquet* están siendo activamente investigados por sus aplicaciones en metrología, información cuántica y, cuando no, para fabricar máquinas térmicas.

2 *Time Crystals* o *Non-equilibrium steady states*?

Antes de empezar, debemos hacer notar que hay muchísimos ejemplos de sistemas que, en condiciones fuera de equilibrio pero bajo un forzado externo estacionario, presentan *auto-organización*, pudiendo adoptar un comportamiento periódico en el tiempo [3, 4]. Un ejemplo conspicuo es la convección de Bénard [5], que se produce cuando una capa de fluido es calentada por debajo. El fluido frío en la parte superior es más denso que el fluído caliente en la capa inferior y tiende a desplazarlo, generando una inestabilidad tipo Rayleigh-Taylor, pero al descender se calienta lo cual hace que el ciclo recomience. Cuando la inestabilidad satura se produce un patrón de celdas convectivas, en las cuales el fluido circula periódicamente.

Un aspecto importante es que para que se dispare la inestabilidad es necesario que la diferencia de temperaturas entre la capa inferior y la superior supere un cierto umbral. Cuando un elemento de fluido frío desplaza a un elemento de fluido caliente, hay una densidad de fuerza neta resultante entre la fuerza peso y la fuerza de sustentación

$$\Delta f_g = g\Delta\rho \approx g\frac{\partial\rho}{\partial T}\Delta T \tag{1}$$

Para que la inestabilidad se dispare es necesario que esta fuerza no pueda ser compensada por la fuerza restauradora generada por la viscosidad

$$\Delta f_\nu = \rho\nu\Delta U \approx \frac{\rho\nu}{d^2}U \tag{2}$$

d es el espesor de la capa. La velocidad U es la velocidad crítica en la cual se obtiene una distribución de temperaturas estacionaria. Para eso el transporte de calor por conducción tiene que ser compensado por la transmisión por convección

$$U\nabla T = \kappa\mathbf{\Delta}T \Rightarrow U \approx \frac{\kappa}{d} \tag{3}$$

Entonces, la condición de que $\Delta f_g > \Delta f_\nu$ se convierte en

$$R_{Ra} = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu} > R_{Ra,cr} \tag{4}$$

R_{Ra} es el *número de Rayleigh*, $\alpha = (d\rho/dT)/\rho$, y el valor crítico del número de Rayleigh es del orden de 10^3.

El caso de la convección de Bénard es típico de problemas donde un estado de equilibrio se vuelve inestable al variar un parámetro. Si consideramos fluctuaciones lineales alrededor del equilibrio, encontramos los modos normales que satisfacen ecuaciones del tipo

$$\dot{X} = -i\Omega X \tag{5}$$

donde en general Ω es complejo

$$\Omega = \omega - i\gamma \tag{6}$$

Mientras $\gamma > 0$ el modo normal es estable, pero γ cambia de signo cuando algún parámetro alcanza un valor crítico, por ejemplo

$$\gamma = \gamma_0 \left(\Delta T_0 - \Delta T\right) \tag{7}$$

Mientras la evolución es lineal obtenemos

$$\frac{d|X|^2}{dt} = -2\gamma |X|^2 \tag{8}$$

Pero cuando el modo se desestabiliza es necesario considerar términos de orden superior. Si promediamos sobre escalas de tiempo grandes respecto de $1/\omega$ pero chicas respecto de $1/\gamma$, los términos cúbicos en X, que son todos oscilatorios, promedian a 0. Por lo tanto, la primer corrección es el término de cuarto orden

$$\frac{d|X|^2}{dt} = -2\gamma |X|^2 - \beta \left(|X|^2\right)^2 \tag{9}$$

con solución

$$|X|^2 = \frac{2\gamma}{\beta} \frac{1}{Ce^{2\gamma t} - 1} \tag{10}$$

Si $\gamma > 0$, vemos que la perturbación revierte al estado de equilibrio. Si $\gamma < 0$, la amplitud satura en un valor

$$|X|^2 = \frac{2|\gamma|}{\beta} \tag{11}$$

y la perturbación continúa oscilando con frecuencia $\omega \approx \omega\left(\Delta T_0\right)$. Si β también es negativo, es necesario considerar términos de sexto orden, y así siguiendo [5].

3 La propuesta de Wilczek

Si bien los intentos por construir un *móbil perpetuo* se pierden en la noche de los tiempos [6], el concepto moderno de cristales de tiempo se origina en dos artículos de Wilczek [7] y Shapere y Wilczek [8].

La propuesta de Wilczek se puede desarrollar en tres etapas: a) el estado fundamental de una partícula en un anillo que atrapa un flujo magnético que no es un múltiplo del cuanto de flujo tiene momento angular y energía cinéticas distintos de cero; b) el estado fundamental de un condensado (de pares de Cooper) en que las partículas se atraen entre sí es inhomogéneo en densidad; ergo c) un condensado en un anillo etc. forma una onda de densidad que gira alrededor del anillo en su estado fundamental.

Veamos estos elementos por separado.

3.0.1 Una partícula en un anillo

El montaje es similar al del efecto Aharonov-Bohm [9]. Puesto que el anillo atrapa un flujo magnético Φ, sobre el anillo hay un potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\varphi} \tag{12}$$

y por lo tanto el Hamiltoniano de la partícula

$$H = \frac{1}{2mr^2}\left(L - \frac{e\Phi}{2\pi c}\right)^2 \tag{13}$$

Donde $L = -i\hbar\partial/\partial_\varphi$. Como L está cuantizado, el estado fundamental corresponde a $L = n\hbar$, donde n es el entero que mejor aproxima a $e\Phi/2\pi c\hbar$. Si esta cantidad no es un entero, el valor de la energía en elestado fundamental no es cero, lo que puede interpretarse como que se ha generado una corriente persistente en el anillo.

3.0.2 Ondas de densidad en condensados

En el estado fundamental de un condensado de Bose-Einstein en una dimensión, con interacción atractiva entre las partículas, la función de onda del condensado obedece la *ecuación de Gross - Pitaievsky* [10]

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-g\left|\Psi\right|^2\Psi \tag{14}$$

Si escribimos $\Psi=e^{i\mu t/\hbar}\psi$, entonces existe una solución no trivial

$$\psi=\frac{A}{\cosh\left(x/d\right)} \tag{15}$$

con

$$d^2=\frac{\hbar^2}{2m\mu}\qquad A^2=\frac{2\mu}{g} \tag{16}$$

El valor del potencial químico μ se obtiene de ajustar el número de partículas en el condensado

$$N=\int dx\ \psi^2=2dA^2=\frac{\hbar}{g}\sqrt{\frac{2\mu}{m}} \tag{17}$$

y por lo tanto

$$d=\frac{\hbar^2}{gm}\frac{1}{N} \tag{18}$$

Si $2\pi r\gg d$, podemos “enrollar” una solución de este tipo en el anillo, obteniendo una *onda de densidad*.

3.0.3 Voilà le cristal du temps

La propuesta de Wilczek se basa en asumir que si el condensado forma una onda de gravedad en el anillo, y se enciende el flujo magnético, entonces la onda se va a poner a girar, arrastrada por la corriente persistente generada por las partículas individuales.

4 No hay cristales de tiempo en equilibrio

La demostración de que no hay cristales de tiempo con sistemas en su estado fundamental es de Watanabe y Oshikawa [11].

Supongamos que queremos construir un cristal de tiempo sobre un sistema extenso. El valor de expectación de cualquier observable en un estado de equilibrio por definición es independiente del tiempo, por lo cual si hay algún tipo de comportamiento periódico debe manifestarse en correlaciones del tipo $G\left(t\right)=\left\langle A\left(t\right)B\left(0\right)\right\rangle$, donde A y B son observables *locales* sobre el sistema

$$\begin{aligned} A\left(t\right) &= \frac{1}{V}\int d^3r\ a\left(r,t\right) \\ B\left(0\right) &= \frac{1}{V}\int d^3r\ b\left(r,0\right) \end{aligned} \tag{19}$$

El Hamiltoniano tiene una estructura similar

$$H=\int d^3r\ h\left(r\right) \tag{20}$$

Para demostrar que $G\left(t\right)$ se anula en el límite termodinámico $V\to\infty$, W-O van a demostrar que $\dot{G}$ está acotada, y que la cota es $O\left(V^{-1}\right)$. Supongamos que la energía del estado fundamental es $E=0$. Entonces

$$A\left(t\right)=e^{iHt/\hbar}A\left(0\right)e^{-iHt/\hbar} \tag{21}$$

y

$$\dot{G}=\frac{-i}{\hbar}\left\langle A\left(0\right)He^{-iHt/\hbar}B\left(0\right)\right\rangle \tag{22}$$

Como el Hamiltoniano es no-negativo, $H^{1/2}$ existe, y

$$\left|\hbar\dot{G}\right|^{2}\leq\left\langle A\left(0\right)HA\left(0\right)\right\rangle\left\langle B\left(0\right)HB\left(0\right)\right\rangle=\frac{1}{4}\left\langle\left[A\left(0\right),\left[H,A\left(0\right)\right]\right]\right\rangle\left\langle\left[B\left(0\right),\left[H,B\left(0\right)\right]\right]\right\rangle \tag{23}$$

Si asumimos que los conmutadores sólo son distintos de cero entre operadores locales evaluados en puntos próximos, es decir que integrales del tipo

$$\int d^{3}x\ \ \left[a\left(x\right),h\left(0\right)\right] \tag{24}$$

convergen, entonces cada valor de expectación escalea como V, pero los operadores A y B escalean como V^{-1}, de manera que efectivamente $\left|\dot{G}\right|^{2}\propto V^{-2}$.

5 El ejemplo de Sacha

Si bien el resultado anterior excluye el rompimiento de la simetría de traslación en el tiempo en un estado de equilibrio, la verdad es que *ninguna* simetría se rompe de esa manera. Lo que caracteriza una verdadera transición de fase, por ejemplo la transición ferromagnética, es que un campo aplicado infinitesimal es suficiente para que el sistema desarrolle una magnetización finita.

Por lo tanto, lo que debemos preguntarnos es si una perturbación dependiente del tiempo es suficiente para poner a oscilar al sistema, y en particular en frecuencias que no sean las de la perturbación.

En su libro [1], K. Sacha presenta lo que podría considerarse un cristal de tiempo de Floquet paradigmático. El sistema es una cadena de espines. $\hat{m}_j$ es el operador de spin en el sitio j, y hay una base en que todos los espines están bien definidos

$$\hat{m}_{j}\left|\vec{m}\right\rangle=m_{j}\left|\vec{m}\right\rangle \tag{25}$$

Consideramos un mapa en vez de una evolución continua. En cada iteración, el mapa está dado por un operador

$$\boldsymbol{U}=UP \tag{26}$$

donde P es el *spin flip*

$$P\left|\vec{m}\right\rangle=\left|-\vec{m}\right\rangle \tag{27}$$

y U es la evolución unitaria durante un tiempo T

$$U=e^{-iTH/\hbar} \tag{28}$$

con un Hamiltoniano

$$H=-\sum_{jk}J_{jk}\hat{m}_{j}\hat{m}_{k} \tag{29}$$

No nos interesan los valores de los coeficientes J_{jk} pero sí que el Hamiltoniano es cuadrático en los espines. Los estados $\left|\vec{m}\right\rangle$ son autoestados de H

$$H\left|\vec{m}\right\rangle=E\left[\vec{m}\right]\left|\vec{m}\right\rangle \tag{30}$$

con el mismo autovalor para $\left|\vec{m}\right\rangle$ y $\left|-\vec{m}\right\rangle$, pero no son autoestados de P. En cambio, los *cat states*

$$\left|\vec{m}\pm\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|\vec{m}\right\rangle\pm\left|-\vec{m}\right\rangle\right\} \tag{31}$$

son autoestados de H y de P y por lo tanto del mapa

$$\begin{aligned}P\left|\vec{m}\pm\right\rangle&=\pm\left|\vec{m}\pm\right\rangle\\ \boldsymbol{U}\left|\vec{m}\pm\right\rangle&=\pm e^{-iTE[\vec{m}]/\hbar}\left|\vec{m}\pm\right\rangle\end{aligned} \tag{32}$$

pero no son autoestados de spin

$$\hat{m}_j \left|\vec{m}\pm\right\rangle = m_j \left|\vec{m}\mp\right\rangle \tag{33}$$

Consideremos el caso en que la cadena está en el estado $\left|\vec{m}+\right\rangle$ Como en el argumento de Watanabe y Oshikawa, los valores de expectación del espin son independientes del tiempo

$$\left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(nT\right)\left|\vec{m}+\right\rangle = \left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(0\right)\left|\vec{m}+\right\rangle = 0 \tag{34}$$

Pero las funciones de correlación resultan

$$\begin{aligned}
\left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(nT\right)\hat{m}_k\left(0\right)\left|\vec{m}+\right\rangle &= e^{iTE[\vec{m}]/\hbar}\left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(0\right)\boldsymbol{U}^n\hat{m}_k\left(0\right)\left|\vec{m}+\right\rangle \\
&= m_k e^{inTE[\vec{m}]/\hbar}\left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(0\right)\boldsymbol{U}^n\left|\vec{m}-\right\rangle \\
&= \left(-1\right)^n m_k\left\langle\vec{m}+\right| \hat{m}_j\left(0\right)\left|\vec{m}-\right\rangle \\
&= \left(-1\right)^n m_j m_k
\end{aligned} \tag{35}$$

Vemos que las funciones de correlación son periódicas, pero el período es $2T$ en vez de T, lo que demuestra que el proceso es no lineal. Además, Sacha [1] demuestra que este comportamiendo es robusto frente a perturbaciones del Hamiltoniano.

En mi opinión, la inversión de espin no se puede considerar una *pequeña perturbación*, y por lo tanto este ejemplo está más cerca de un estado estacionario fuera de equilibrio, como la convección de Bénard, que de la idea original de cristales de tiempo propuesta por Wilczek. Sin embargo, el hecho es que la búsqueda de la construcción de cristales de tiempo en el laboratorio llevó a avances en la preparación y control de este tipo de sistemas, y en ese sentido la polémica ha sido valiosa.

Apéndice: La respuesta de Nozières

La propuesta de Wilczek generó una polémica y eventualmente una refutación detallada por parte de P. Bruno [12]. A su vez, Nozières desarrolló una presentación simplificada de los argumentos de Bruno [13]. El modelo de Nozières busca demostrar que el estado de la onda de densidad con velocidad angular no nula *siempre* tiene más energía que el estado sin rotación.

Si el condensado está en movimiento, entonces la función de onda toma la forma de Madelung

$$\psi = \sqrt{n}\, e^{iS} \tag{36}$$

El momento angular por partícula es

$$L = \frac{\hbar}{2\pi}\int d\varphi\; S_{,\varphi} \tag{37}$$

y está cuantificado, de manera que

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi\; S_{,\varphi} = \ell \in \mathbf{Z} \tag{38}$$

Empecemos con el caso $\ell = 0$. En el referencial que rota junto con el condensado, la densidad de carga es independiente del tiempo, y por lo tanto la densidad de corriente es uniforme

$$J' = \frac{en}{mr}\left[\hbar S_{,\varphi} - \frac{er}{c}A'\right] \tag{39}$$

donde A' es el potencial vector en el sistema rotante. Por lo tanto

$$S_{,\varphi} = \frac{er}{c\hbar}A' + \frac{mr}{e\hbar}\frac{J'}{n} \tag{40}$$

Integrando sobre el anillo encontramos

$$\frac{e}{c}A' + \frac{m}{e}J'\left(\bar{\frac{1}{n}}\right) = 0 \tag{41}$$

donde la barra indica promedio sobre el anillo. Si el contraste de densidad no es muy grande, $n = n_0\left(1+\delta\right)$, $\delta \ll 1$, entonces

$$\left(\bar{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n_0}\left[1 + (\bar{\delta^2})\right] \tag{42}$$

y

$$J' = -\frac{e^2 n_0}{mc} A' \left[1 - (\bar{\delta^2})\right] \tag{43}$$

En el sistema del laboratorio la corriente es

$$J = J' + en\Omega r = \frac{en}{mr}\left[\hbar S_{,\varphi} - \frac{er}{c}A\right] \tag{44}$$

de modo que $A' = A + mc\Omega r/e$, y la energía

$$H = \int r d\varphi \, \frac{n}{2mr^2}\left[\hbar S_{,\varphi} - \frac{er}{c}A\right]^2 = \frac{m}{e^2}\int r d\varphi \, \frac{1}{n} J^2 \tag{45}$$

Ahora

$$J = J_0 + en_0 r \left(\delta + (\bar{\delta^2})\right)\Omega \tag{46}$$

$J_0 = -e^2 n_0 A \left(1 - (\bar{\delta^2})\right)/mc$. El término lineal en Ω es

$$\frac{2J_0 m n_0 r^2}{e}\int d\varphi \, \frac{1}{n}\left(\delta + (\bar{\delta^2})\right)\Omega \tag{47}$$

Reemplazando al orden requerido

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0}(1 - \delta) \tag{48}$$

vemos que la integral se anula,

$$\int d\varphi \, \left(\delta - \delta^2 + (\bar{\delta^2})\right) = 0 \tag{49}$$

y el término cuadrático es definido positivo, por lo cual la energía es mínima cuando $\Omega = 0$.

Si $\ell \neq 0$, entonces

$$\frac{e}{c}A' + \frac{m}{e}J'\left(\bar{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\hbar}{e}\ell \tag{50}$$

y el argumento es idéntico, reemplazando $A' \to A' - c\hbar\ell/e^2$.

References

[1] K. Sacha, *Time Crystals* (Springer, Berlín (2020)).

[2] Michael P. Zaletel, Mikhail Lukin, Christopher Monroe, Chetan Nayak, Frank Wilczek and Norman Y. Yao, Colloquium: Quantum and classical discrete time crystals, Rev. Mod. Phys. 95, 031001 (2023).

[3] I. Prigogine y G. Nicolis, *Self-organization in Nonequilibrium Systems* (John Wiley, New York, 1977).

[4] D. Kondepudi y I. Prigogine, *Modern Thermodynamics* (John Wiley, New York, 2002).

[5] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos* (Reverté, Barcelona, 2001).

[6] V. Khemani, R. Moessner y S. L. Sondhi, A Brief History of Time Crystals, arXiv:1910.10745 (2019).

[7] Wilczek F 2012 Phys. Rev. Lett. 109(16) 160401 URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.160401

[8] Shapere A y Wilczek F 2012 Phys. Rev. Lett. 109(16) 160402 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.160402.

[9] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Revised edition) (Addison-Wesley, New York (1994)).

[10] C. J. Pethick y H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases* (2a edición) (Cambridge U. P., Londres (2008)).

[11] Watanabe H y Oshikawa M 2015 Phys. Rev. Lett. 114(25) 251603
URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114. 251603

[12] Bruno P 2013 Phys. Rev. Lett. 111(7) 070402 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.070402.

[13] Nozières P 2013 EPL (Europhysics Letters) 103 57008 (Preprint 1306.6229).