Teoría Avanzada de la Termodinámica – 2do cuatrimestre de 2023

Guía 2: *Entropía y trabajo disponible*

1. (Callen 4.4-6) Hay $N + 1$ grandes recipientes con agua, a temperaturas T_0, $T_1, \ldots, T_N$. Cada par de temperaturas consecutivas satisface $1 < T_{j+1}/T_j = \alpha$. Un pequeño cuerpo se encuentra inicialmente en equilibro en el recipiente a temperatura T_0, y se lo va llevando de un recipiente al siguiente, en orden creciente de temperaturas, hasta llegar al recipiente a temperatura T_N. En cada paso el cuerpo alcanza el equilibrio con el respectivo recipiente. Finalmente, se invierte la secuencia, paso por paso, hasta que el cuerpo regresa al primer recipiente. La capacidad calorífica del cuerpo, C, y su volumen V pueden considerarse constantes e independientes de la temperatura. Calcule el cambio en la entropía total

   a) al llevar el cuerpo del primer al último recipiente,

   b) al llevar el cuerpo del último al primer recipiente,

   c) al completar el camino de ida y vuelta.

   Calcule hasta el primer término no trivial en la dependencia con N de estos resultados al tomar $N \gg 1$, manteniendo T_0 y T_N fijos (primer término no trivial = primer término que donde aparece una dependencia en N no trivial; dependencia trivial = función constante). Discuta el resultado en el límite $N \to \infty$.

2. (Callen 4.5-13) Un sistema tiene volumen y capacidad calorífica constantes. Inicialmente su temperatura es T_i. Hay disponible un reservorio a temperatura $T_\mathrm{c} < T_\mathrm{i}$. ¿Cuál es la máxima cantidad de trabajo que puede obtenerse si el sistema se enfría hasta la temperatura del reservorio?

3. (Callen 4.5-1) Un mol de un gas ideal está contenido en un cilindro de volumen V_0 a temperatura T_0. Se desea llevar al gas a un estado con el doble del volumen inicial y la misma temperatura. Hay disponible un reservorio térmico a temperatura $T_\mathrm{c} < T_0$. ¿Cuál es el máximo trabajo que puede entregar el sistema?

4. (Callen 4.5-2) Considere el siguiente proceso específico para el sistema del problema anterior. En primer lugar el gas ideal es expandido adiabáticamente hasta que su temperatura llega a T_c. Luego el gas se expande en contacto con el reservorio térmico a T_c, y por último se comprime adiabáticamente hasta que su volumen y su temperatura alcanzan los valores deseados ($2V_0$ y T_0). El proceso es reversible.

   a) ¿A qué volumen debe expandirse el gas en el segundo paso para que la compresión adiabática del tercer paso lo lleve al estado final deseado?

   b) Calcule el trabajo entregado por el sistema en cada paso del proceso, y muestre que los resultados globales son idénticos a los obtenidos mediante el enfoque general del problema anterior.

5. Dos cuerpos idénticos, cada uno con capacidad calorífica constante $C(T) = C$, están inicialmente a temperaturas T_{10} y T_{20}, con $T_{10} < T_{20}$. Sus volúmenes pueden considerarse constantes.

   a) ¿Cuál es el máximo trabajo que puede obtenerse de estos dos cuerpos si en el estado final ambos están en equilibrio térmico entre sí? ¿Cuál es la temperatura de equilibrio? Puede usarse un sistema auxiliar para extraer el trabajo, pero éste debe volver a su estado inicial al final del proceso.

b) ¿Es posible alcanzar una temperatura inferior a la obtenida en el ítem anterior?

c) ¿Hay algún valor máximo para la temperatura final de equilibrio?

6. Repita el problema anterior para el caso en que la capacidad calorífica está dada por $C(T) = a/T$.

7. Una máquina de Carnot que opera en ciclos infinitesimales es una máquina de Carnot que en cada ciclo produce un trabajo δW e intercambia calores δQ_1 y δQ_2 con dos cuerpos a temperaturas T_1 y T_2, que no tienen entonces que ser reservorios ideales. Luego de cada ciclo las temperaturas de los dos cuerpos habrán variado infinitesimalmente. Suponga que una de estas máquinas opera entre dos cuerpos idénticos, cada uno con capacidad calorífica constante e igual a C, y que están inicialmente a temperaturas T_{10} y T_{20}, con $T_{10} < T_{20}$. Sus volúmenes pueden considerarse constantes.

   a) Sean δT_1 y δT_2 las variaciones de temperatura de cada cuerpo durante un ciclo. Encuentre la ecuación que las relaciona.

   b) Integrando la ecuación anterior, encuentre la temperatura de equilibrio.

   c) En función de las temperaturas iniciales, encuentre el rendimiento neto, definido como $\eta = W/Q_2$, donde W es el trabajo total obtenido hasta que se alcanza el equilibrio y Q_2 es el calor total entregado por el cuerpo inicialmente a T_{20}.

   d) ¿Cuánto vale W? Notar que este problema da una construcción concreta para el problema 5.

8. (Callen 4.5-15.) Un cilindro rígido está dividido por un pistón adiabático. A un lado del pistón, ocupando un volumen inicial V_{10} hay un mol de gas ideal monoatómico a temperatura T_{10}. Al otro lado, ocupando un volumen V_{20} hay un mol de gas ideal diatómico ($c_V/R = 5/2$) a temperatura T_{20}. También hay disponible un reservorio térmico a temperatura T_c. ¿Cuál es la máxima cantidad de trabajo que puede obtenerse y cuáles son las temperaturas y volúmenes finales de cada gas?

9. Considere un motor que absorbe calor de un número arbitrario de fuentes (que llamaremos las fuentes calientes) y cede calor a un número arbitrario de fuentes (que llamaremos las fuentes frías). Muestre que la eficiencia η del motor cumple $\eta \leq 1 - T_{min}/T_{max}$, donde T_{max} es la máxima temperatura de las fuentes calientes y T_{min} la mínima temperatura de las fuentes frías.

10. El ciclo de Otto es un modelo idealizado del funcionamiento de un motor de gasolina, y consiste en cuatro procesos reversibles: 1) compresión adiabática de un estado A a un estado B, 2) calentamiento isocórico (a volumen constante) del estado B a un estado C, 3) expansión adiabática del estado C a un estado D, y 4) enfriamiento isocórico del estado D al estado A.

    a) Represente el ciclo de Otto en un diagrama $S - V$.

    b) Suponiendo que la sustancia de trabajo es un mol de gas ideal con calor específico a volumen constante $c_V = \alpha R$, muestre que la eficiencia del motor es $\eta = 1 - (V_B/V_A)^{1/\alpha}$.

    c) Reescriba el resultado del ítem anterior en términos de las temperaturas de los estados A y B. ¿Es óptima la eficiencia del ciclo de Otto?