Entropía de Agujeros Negros. Parte 1

November 8, 2023

1 Introducción

Este apunte va a ser la base de la discusión de entropía de agujeros negros en las últimas semanas del curso. Como el Principio de Landauer, la hipótesis de Bekenstein y Hawking de que un agujero negro posee una entropía intrínseca surge de la necesidad de tapar lo que de otra forma sería una laguna en la Segunda Ley. Sorprendentemente, sin embargo, hay cada vez más evidencia de que, al final, los agujeros negros no son tan especiales después de todo, y que la entropía de los agujeros negros no es sino la manifestación de un fenómeno más profundo.

La próxima sección es una colección de resultados de relatividad general, que son esencialmente a los que vamos a apelar en nuestra discusión de agujeros negros. No pretende reemplazar a la literatura. La sección siguiente cubre la cuña de Rindler y el efecto Unruh, y establece la relación fundamental entre aceleración y temperatura que va a ser nuestra llave para abrir la caja negra de la entropía de Hawking-Bekenstein.

La parte fundamental del apunte son por lo tanto las dos secciones siguientes. En la cuarta vamos a discutir los agujeros negros de Schwarzchild y de Kerr, enfocando el origen de su entropía y su temperatura. En la quinta, fieles al espíritu del curso, vamos a discutir ciclos termodinámicos en los que intervienen agujeros negros, con el objeto de apuntalar la convicción de que al final del día la entropía de Bekenstein realmente es entropía termodinámica. Finalmente, vamos a mencionar brevemente algunas direcciones en las que la investigación avanza en este mismo momento.

Los temas que estamos tratando están en cualquier buen libro de relatividad general, yo calificaría a Schutz [?] y Hartle [?] como accesibles, y Wald [?] y Misner, Thorne y Wheeler [?] como no tan accesibles, pero imprescindibles si uno quiere estudiar en serio. El Landau [?] es una joya como siempre pero en estos temas ha sufrido el paso del tiempo más que en otros.

Respecto a entropía de agujeros negros, cabe mencionar nuevamente a Wald [?], y las *lectures* de Jacobson [?] y Unruh [?].

2 Elementos de relatividad general

2.1 Vectores y tensores

El principio más básico de la Relatividad General es que el espacio-tiempo se puede describir como una *variedad de cuatro dimensiones*. Esto quiere decir que el espacio tiempo es un conjunto, y cada elemento de ese conjunto pertenece a su vez a un subconjunto que es isomorfo a $\mathbf{R}^4$. Es decir, si P pertenece a la variedad $\mathcal{M}$, entonces P es la imagen de algún punto $x_P = (x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3)$ en $\mathbf{R}^4$ según alguna función biunívoca ϕ de $\mathbf{R}^4$ en $\mathcal{M}$, definida en algún conjunto abierto $\mathcal{O}$ que contiene a x_P. Definiendo que los conjuntos abiertos de $\mathcal{M}$ son las imágenes de los conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^4$ según estos mapas (por lo cual ϕ es continua), la identificación $P \leftrightarrow x_P$ nos permite construír un "sistema de coordenadas" en un entorno de P.

Una función ψ de $\mathcal{M}$ a $\mathbf{R}$ define una función de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}$ de acuerdo con la construcción $\Psi(x_P) = \psi(P)$. La función Ψ tiene un diferencial

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} dx^\mu \tag{1}$$

$0 \leq \mu \leq 3$, y estamos usando la convención de Einstein. Supongamos que el punto P pertenece a dos sistemas de coordenadas distintos, el sistema en que las coordenadas de P son los x_P^μ y el sistema en que las coordenadas son los ξ_P^α. La función que conecta x_P con ξ_P para cada P es un isomorfismo de $\mathbf{R}^4$ en sí mismo. En el nuevo sistema de coordenadas podríamos definir

$$d\bar{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \tag{2}$$

pero de hecho $d\bar{\Psi} = d\Psi$, porque

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \tag{3}$$

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{4}$$

y

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \tag{5}$$

es la delta de Kronecker. En general, decimos que una función Ψ que es invariante frente a cambios de coordenadas (en el sentido que $\bar{\Psi}(\xi_P) = \Psi(x_P)$) define un escalar. Un conjunto de cuatro funciones A_μ que se transforman como las derivadas de un escalar definen un *vector covariante*

$$\bar{A}_\alpha(\xi_P) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A_\mu(x_P) \tag{6}$$

Un conjunto de cuatro funciones A^μ que se transforman como los diferenciales de las coordenadas definen un *vector contravariante*

$$\bar{A}^\alpha(\xi_P) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu(x_P) \tag{7}$$

(nótese que la "contracción" $A_\mu B^\mu$ de un vector covariante y otro contravariante define un escalar). Un tensor mixto de orden (n, m) es un conjunto de funciones $T_{\nu_1 \ldots \nu_m}^{\mu_1 \cdots \mu_n}$ que se transforma como el producto de n vectores contravariantes y m vectores covariantes.

2.2 La métrica

El paso siguiente en la construcción del espacio-tiempo es dotar a la variedad $\mathcal{M}$ de un tensor dos veces covariante simétrico $g_{\mu\nu}$. Entonces

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(P)\, dx^\mu dx^\nu \tag{8}$$

define un escalar, que interpretamos como el "intervalo" entre los puntos x_P y $x_Q = x_P + dx$. Asumimos que $g_{\mu\nu}$ es una "métrica de Minkowski", es decir, que en cada punto la matriz $g_{\mu\nu}(P)$ tiene un autovalor negativo y tres positivos (a diferencia de las métricas de Riemann, que tienen todos sus autovalores positivos), ninguno de ellos nulo. Entonces, en cada punto P es posible definir un cambio de coordenadas

$$x_Q^\mu = \xi_P^\mu + M_\alpha^\mu(P)\left(\xi_Q^\alpha - \xi_P^\alpha\right) + \dots \tag{9}$$

tal que

$$g_{\alpha\beta}(P) = M_\alpha^\mu(P)\, M_\beta^\nu(P)\, g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\alpha\beta} \tag{10}$$

donde $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ es la métrica de Minkowski. Esto implica en particular que asociamos la coordenada x^0 con el autovector de $g_{\mu\nu}$ con autovalor negativo, es decir el tiempo, $x^0 = ct$.

Puesto que asumimos que $g_{\mu\nu}$ no tiene autovalores nulos, es invertible. Su inversa $g^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico dos veces contravariante, tal que

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu \tag{11}$$

En general, si A_μ es un vector covariante, entonces $A^\mu = g^{\mu\rho} A_\rho$ es contravariante, y viceversa.

También conviene definir

$$g = \det g_{\mu\nu} \tag{12}$$

Claramente $g < 0$.

2.3 Observadores inerciales y derivación covariante

Ya vimos que en cada punto del espacio existe un cambio de coordenadas $x^\mu \to \xi^a$ tal que en las nuevas coordenadas

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} = \eta_{ab} \tag{13}$$

Trabajando un poco más podemos lograr que las derivadas primeras $g_{ab,c}$ se anulen. Para eso es necesario que

$$0 = g_{\mu\nu,\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^c} + g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^a \partial \xi^c} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} + g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \xi^b \partial \xi^c} \tag{14}$$

que es equivalente a

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^b \partial \xi^c} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^c} \tag{15}$$

donde Γ es la *conexión* (o *conexión de Levi-Civita*)

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left\{ g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\rho} - g_{\rho\lambda,\nu} \right\} \tag{16}$$

Nótese que la conexión es simétrica en el par (ρ, λ)

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} \tag{17}$$

por lo que la ecuación 15 es consistente. Un sistema donde la métrica toma la forma de Minkowski y sus derivadas se anulan (ambas cosas en un único punto) se dice "localmente inercial".

En general, las derivadas de un vector no definen un tensor. Por eso, se define la "derivada covariante" de un vector A^{μ} como el tensor $A^{\mu}_{;\nu}$ cuyas componentes se reducen a las derivadas ordinarias del vector A^{μ} en un sistema localmente inercial, es decir

$$A^{\mu}_{;\nu} = \nabla_{\nu} A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial \xi^{b}}{\partial x^{\nu}} A^{a}_{,b} \tag{18}$$

Trabajando un poco las derivadas y usando la ecuación 15 podemos eliminar toda referencia explícita al sistema localmente inercial de referencia

$$A^{\mu}_{;\nu} = \nabla_{\nu} A^{\mu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} A^{\rho} \tag{19}$$

La derivación covariante se define para tensores arbitrarios pidiendo que la derivada covariante de un escalar coincida con la derivada ordinaria, y que valga la regla de Leibniz. Entonces, por ejemplo,

$$\nabla_{\rho} \left(A_{\mu} B^{\mu} \right) = A_{\mu,\rho} B^{\mu} + A_{\sigma} B^{\sigma}_{,\rho} \tag{20}$$

pero también

$$\nabla_{\rho} \left(A_{\mu} B^{\mu} \right) = \left(\nabla_{\rho} A_{\mu} \right) B^{\mu} + A_{\sigma} \left(B^{\sigma}_{,\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} B^{\mu} \right) \tag{21}$$

Por lo tanto

$$\nabla_{\rho} A_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} A_{\lambda} \tag{22}$$

Por construcción

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

lo cual implica que

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\lambda\mu} \tag{24}$$

y

$$g_{,\rho} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} = 2g \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} \tag{25}$$

La conexión NO es un tensor (la derivada covariante de un tensor sí es un tensor, de rango mayor). Ante un cambio de coordenadas

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\gamma}} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \xi^{\beta} \partial \xi^{\gamma}} \tag{26}$$

2.4 Tiempo propio, velocidad y aceleración

Si un observador sigue una trayectoria $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, entonces definimos su tiempo propio

$$c^2 d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{27}$$

Para observadores físicos debe ser $d\tau^2 \geq 0$, la igualdad corresponde a la trayectoria de un rayo de luz. La velocidad es

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{cd\tau} \tag{28}$$

Por construcción

$$u^2 = u_\mu u^\mu = -1 \tag{29}$$

o cero para un rayo de luz (en cuyo caso decimos que es una trayectoria nula). La aceleración es la variación de la velocidad vista por el mismo observador

$$a^\mu = c^2 \frac{du^\mu}{cd\tau} = c^2 u^\nu u^\mu_{;\nu} \tag{30}$$

Por construcción,

$$u_\mu a^\mu = 0 \tag{31}$$

Como ejemplo, veamos como es un MRUA en un espacio de Minkowski de dos dimensiones. La velocidad tiene dos componentes u^0 y u^1. Como $u^{02} - u^{12} = 1$ podemos parametrizar $u^0 = \cosh \lambda\tau$ y $u^1 = \sinh \lambda\tau$, y entonces

$$\begin{aligned} ct &= \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda\tau \\ x &= \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda\tau \end{aligned} \tag{32}$$

y también

$$\begin{aligned} a^0 &= c\lambda \sinh \lambda\tau \\ a^1 &= c\lambda \cosh \lambda\tau \end{aligned} \tag{33}$$

La condición de "aceleración constante" quiere decir que $a^2 = -a^{02} + a^{12}$ permanece constante, y entonces $\lambda = \text{constante} = a/c$.