La cuña de Rindler y el efecto Unruh

November 10, 2023

1 Introducción

La vez pasada mostramos que la trayectoria de un observador uniformemente acelerado en el universo de Minkowski en una dimensión espacial se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{a}\cosh\frac{a\tau}{c} \\ ct &= \frac{c^2}{a}\sinh\frac{a\tau}{c}\tau \end{aligned} \tag{1}$$

Alternativamente podemos introducir coordenadas

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c^2}{a} \\ \theta &= \frac{a\tau}{c} \end{aligned} \tag{2}$$

Estas coordenadas cubren la *cuña de Rindler* $x \geq 0$, $-x \leq ct \leq x$. En estas coordenadas, la métrica es

$$ds^2 = -\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \tag{3}$$

Por lo tanto, los observadores de Rindler se perciben a sí mismos como viviendo en un Universo estático.

Si el espacio estuviera ocupado por un campo cuántico en su estado de vacío, y uno de estos observadores llevara consigo un detector de partículas, ¿qué detectaría?

2 Cuantificación del campo escalar libre

Para empezar, tenemos que caracterizar el estado de vacío de un campo cuántico, que tomaremos como un campo escalar, porque es lo más sencillo.

Un campo escalar libre obedece la ecuación de Klein-Gordon. En una dimensión

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \tag{4}$$

y se cuantifica observando que si descomponemos el campo en modos

$$\phi = \int \frac{dk}{(2\pi)} e^{ikx} \phi_k(t) \tag{5}$$

Entonces ϕ_k es un oscilador armónico

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2} + \omega_k^2 \phi_k = 0 \tag{6}$$

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \tag{7}$$

El operador del campo en representación de Heisenberg se escribe en términos de los operadores de creación y destrucción para cada modo

$$\phi = \int \frac{dk}{(2\pi)} \sqrt{\frac{\hbar c}{2\omega_k}} e^{ikx} \left[e^{-i\omega_k t} a_k + e^{i\omega_k t} a_{-k}^\dagger \right] \tag{8}$$

$$\left[a_k, a_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^d \, \delta (k - k') \tag{9}$$

$N_k = a_k^\dagger a_k$ es el operador número de partículas. En el estado de vacío

$$\langle N_k \rangle = 0 \tag{10}$$

En un estado térmico

$$\langle N_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1} \tag{11}$$

3 Detectores de partículas

Reducido a lo esencial, un detector de partículas es un sistema de dos niveles en el que la amplitud de transición de un nivel a otro es proporcional a la amplitud del campo en la posición del detector. El sistema acoplado campo-detector tiene un Hamiltoniano

$$H = H_C + H_D + H_{CD} \tag{12}$$

H_C es el Hamiltoniano del campo libre, H_D es el Hamiltoniano del detector con dos autovectores $H_D |G\rangle = 0$ y $H_D |E\rangle = E |E\rangle$ y H_{CD} es el Hamiltoniano de interacción en representación de Schrödinger. Estamos considerando el caso en que el detector es una partícula puntual que sigue una trayectoria $(x_D(t), t_D(t))$ parametrizada por el tiempo propio del detector t. La interacción con el campo induce transiciones entre los dos niveles del detector, con una probabilidad de transición proporcional a la amplitud del campo en el evento en que se encuentra el detector y a un observable del detector que acopla los dos estados entre sí. En la representación en que

$$\begin{aligned} |G\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |E\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

podemos tomar este observable como

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \left|E\right\rangle\left\langle G\right| + \left|G\right\rangle\left\langle E\right| \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_x \end{aligned} \tag{14}$$

Para seguir la evolución del sistema acoplado, es conveniente utilizar la *representación de interacción* [1]. Si $\left|C-D\right\rangle_S(t)$ es un estado del sistema acoplado en representación de Schrödinger, entonces en representación de interacción

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|C-D\right\rangle(t) = H^I_{CD}\left|C-D\right\rangle(t) \tag{15}$$

donde H^I_{CD} es el Hamiltoniano de interacción *en la representación de interacción*

$$H^I_{CD} = e^{i(H_C+H_D)t/\hbar}H_{CD}e^{-i(H_C+H_D)t/\hbar} = \gamma\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)\mathbf{m}\left(t\right) \tag{16}$$

$\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)$ es un campo libre, y por lo tanto se puede desarrollar en operadores de creación y destrucción como vimos más arriba. Análogamente

$$\mathbf{m}\left(t\right) = e^{iH_Dt/\hbar}\sigma_x e^{-iH_Dt/\hbar} \tag{17}$$

Si la interacción entre campo y detector es débil, entonces la ecuación de movimiento para el estado se puede resolver perturbativamente en γ. Si en el pasado lejano el campo está en el estado $\left|X\right\rangle$ y el detector en su estado fundamental $\left|G\right\rangle$, entonces a primer orden

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|C-D\right\rangle(t) = \gamma\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)\mathbf{m}\left(t\right)\left|X\right\rangle\left|G\right\rangle \tag{18}$$

con la integral trivial

$$\left|C-D\right\rangle(t) = \left|X\right\rangle\left|G\right\rangle - \frac{i\gamma}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\ \phi\left(x_D\left(t'\right), t_D\left(t'\right)\right)\mathbf{m}\left(t'\right)\left|X\right\rangle\left|G\right\rangle \tag{19}$$

La amplitud de encontrar al detector en el estado E, y al campo en algún estado $\left|Y\right\rangle$, a tiempos muy largos, es

$$\begin{aligned} A &= \frac{-i\gamma}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \left\langle Y\right|\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)\left|X\right\rangle\left\langle E\right|\mathbf{m}\left(t\right)\left|G\right\rangle \\ &= \frac{-i\gamma}{\hbar}\left\langle E\right|\sigma_x\left|G\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{iEt/\hbar}\left\langle Y\right|\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)\left|X\right\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

y la probabilidad

$$\begin{aligned} &P = \left|A\right|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\left|\left\langle E\right|\sigma_x\left|G\right\rangle\right|^2 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dtdt'\ e^{iE(t-t')/\hbar}\left\langle X\right|\phi\left(x_D\left(t'\right), t_D\left(t'\right)\right)\left|Y\right\rangle\left\langle Y\right|\phi\left(x_D\left(t\right), t_D\left(t\right)\right)\left|X\right\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

Con $|\langle E|\,\sigma_x\,|G\rangle|^2=1$

Si sólo nos interesa la probabilidad de que el detector se excite, sumamos sobre $|Y\rangle$

$$\mathcal{P}=\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}dtdt'\;e^{iE(t-t')/\hbar}\,\langle X|\,\phi\left(x_D\left(t'\right),t_D\left(t'\right)\right)\phi\left(x_D\left(t\right),t_D\left(t\right)\right)|X\rangle \tag{22}$$

El próximo paso es descomponer el operador de campo en operadores de creación y destrucción. Si el estado $|X\rangle$ tiene números de partículas bien definidos en cada modo, entonces

$$\begin{aligned}\langle X|\,a^\dagger_{k'}a_k\,|X\rangle &= (2\pi)^d\,N_k\delta\left(k-k'\right)\\ \langle X|\,a_{k'}a^\dagger_k\,|X\rangle &= (2\pi)^d\left(1+N_k\right)\delta\left(k-k'\right)\\ \langle X|\,a_{k'}a_k\,|X\rangle &= \langle X|\,a^\dagger_{k'}a^\dagger_k\,|X\rangle=0\end{aligned} \tag{23}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}=\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\int\frac{dk}{(2\pi)}\frac{\hbar c}{2\omega_k}\int_{-\infty}^{\infty}dtdt'\;e^{iE(t-t')/\hbar}\\ &\left\{\left(1+N_k\right)e^{-ik(x_D(t)-x_D(t'))+i\omega_k(t_D(t)-t_D(t'))}+N_k e^{ik(x_D(t)-x_D(t'))-i\omega_k(t_D(t)-t_D(t'))}\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

que identificamos como

$$\mathcal{P}=\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\int\frac{dk}{(2\pi)}\frac{\hbar c}{2\omega_k}\left[\left(1+N_k\right)|\mathcal{A}|^2+N_k\,|\mathcal{B}|^2\right] \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\infty}^{\infty}dt\;e^{i\{Et/\hbar-kx_D(t)+\omega_k t_D(t)\}}\\ \mathcal{B} &= \int_{-\infty}^{\infty}dt\;e^{i\{Et/\hbar+kx_D(t)-\omega_k t_D(t)\}}\end{aligned} \tag{26}$$

4 Detectores inerciales

Antes de probar con los observadores acelerados, probamos el caso en que el detector está en reposo, es decir $x_D\left(t\right)=0$, $t_D\left(t\right)=t$. En este caso

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 2\pi\delta\left(\omega_k+\frac{E}{\hbar}\right)=0\\ \mathcal{B} &= 2\pi\delta\left(\omega_k-\frac{E}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{27}$$

Usamos que

$$\delta^2\left(\omega_k-\frac{E}{\hbar}\right)=\delta\left(0\right)\delta\left(\omega_k-\frac{E}{\hbar}\right) \tag{28}$$

y

$$\delta\left(0\right)=\mathcal{T} \tag{29}$$

es el tiempo total que está encendido el detector. Vemos que efectivamente la probabilidad de que el detector se excite es proporcional al número de partículas en el modo k en resonancia con el gap del detector. En particular, si el campo se encuentra en un estado térmico, la probabilidad de excitación es proporcional a $\langle N_E\rangle_\beta\approx e^{-\beta E}$.

5 Detectores acelerados

Si el detector está siguiendo una trayectoria arbitraria, la integral sobre el tiempo se reemplaza por una integral sobre la trayectoria, parametrizada por el tiempo propio t del detector

$$
\begin{aligned}
x_D(t) &= \rho \cosh \frac{ct}{\rho} \\
ct_D(t) &= \rho \sinh \frac{ct}{\rho}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Además tomamos la masa del campo $m = 0$, de modo que $\omega_k = c|k|$, y el estado inicial del campo como su estado de vacío. La probabilidad de excitación del detector se reduce a

$$
\mathcal{P} = \frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int \frac{dk}{(2\pi)} \frac{\hbar c}{2\omega_k} |\mathcal{A}|^2 \tag{31}
$$

donde ahora, si $k > 0$,

$$
\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{i\left\{Et/\hbar - k\rho e^{-ct/\rho}\right\}} \tag{32}
$$

y si $k < 0$

$$
\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{i\left\{Et/\hbar + |k|\rho e^{ct/\rho}\right\}} \tag{33}
$$

Aunque la integral se puede hacer, para nuestros propósitos es más interesante notar que existe un punto silla cuando

$$
\frac{E}{\hbar} + |k| c e^{\pm ct/\rho} = 0 \tag{34}
$$

de modo que

$$
e^{\pm ct/\rho} = -\frac{E}{\hbar c|k|}; \quad t = \pm \ln\left[\frac{E}{\hbar c|k|}\right] \pm \frac{i\pi\rho}{c} \tag{35}
$$

Aproximando la integral por su valor en el punto silla obtenemos

$$
|\mathcal{A}|^2 \approx e^{-2\pi E\rho/\hbar c} \tag{36}
$$

como corresponde a un detector sumergido en un baño térmico con temperatura $\beta \approx 2\pi\rho/\hbar c$, o sea

$$
T = \frac{\hbar}{2\pi k_B c} a \tag{37}
$$

El hecho de que la temperatura de Unruh depende de la constante de Planck muestra que el efecto es de origen cuántico. De todas formas el efecto es minúsculo:

$$
T \approx 10^{-18}\mathrm{K}\left(\frac{a}{g}\right) \tag{38}
$$

($g = 9.8$ m s^{-2}).

Apéndice A: ¿MRUA o MRU?

Consideremos una trayectoria $\rho =$ constante en la cuña de Rindler. En este caso, el tiempo propio

$$-c^2 d\tau^2 = -\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \tag{39}$$

se reduce a

$$c d\tau = \rho d\theta \tag{40}$$

o sea $\theta = c\tau/\rho$, $\rho =$ constante. La velocidad

$$\begin{aligned} u^\theta &= \frac{d\theta}{cd\tau} = \frac{1}{\rho} \\ u^\rho &= \frac{d\rho}{cd\tau} = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

($u^2 = -1$, *comme il faut*). Obsérvese que la velocidad es *constante* a lo largo de la trayectoria. ¿Cómo puede ser que el movimiento sea acelerado?

Notamos que la condición de que $u_\mu a^\mu = 0$ efectivamente requiere que $a^\theta = 0$, de manera que la cuestión concierne a a^ρ

$$a^\rho = c^2 u^\theta u^\rho_{;\theta} = c^2 \left[u^\theta u^\rho_{,\theta} + \Gamma^\rho_{\theta\theta} \left(u^\theta \right)^2 \right] \tag{42}$$

El primer término es efectivamente cero, pero en el segundo $\Gamma^\rho_{\theta\theta} = \rho$, y finalmente

$$a = \frac{c^2}{\rho} \tag{43}$$

como debía ser.

Apéndice B: acerca de las representaciones en mecánica cuántica

Como se ve en el texto principal, la evolución de un sistema cuántico toma aspectos muy distintos según qué representación de la dinámica se use.

Las dos reglas que nos permiten pasar de una a otra repreentación son que

- I: Todas las representaciones coinciden en el tiempo inicial, que tomamos $t = 0$
- II: Los valores medios de un observable A se pueden calcular indistintamente en cualquier representación

En la *representación de Schrödinger*, la matriz de un observable A es independiente del tiempo, mientras que un estado $|\psi\rangle$ evoluciona en el tiempo como

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle \tag{44}$$

que es equivalente a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_S = H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_S \tag{45}$$

En la *representación de Heisenberg*, los estados son independientes del tiempo. Por la regla II, debemos tener

$$\left\langle\psi\left(0\right)\right|A_H\left(t\right)\left|\psi\left(0\right)\right\rangle ={}_S\left\langle\psi\left(t\right)\right|A\left(0\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_S \tag{46}$$

Por lo tanto

$$A_H\left(t\right) = e^{iHt/\hbar}A\left(0\right)e^{-iHt/\hbar} \tag{47}$$

que es equivalente a la ecuación de movimiento

$$\hbar\frac{d}{dt}A_H\left(t\right) = i\left[H, A\left(t\right)\right] \tag{48}$$

La *representación de interacción* es útil cuando el Hamiltoniano admite una descomposición $H = H_0 + H_1$ (decimos que H_0 es el hamiltoniano *libre* y H_1 el Hamiltoniano *de interacción*). Entonces, definimos

$$A_I\left(t\right) = e^{iH_0t/\hbar}A\left(0\right)e^{-iH_0t/\hbar} \tag{49}$$

Es decir, el operador en representación de interacción con el Hamiltoniano H es el mismo que el operador en la representación de Heisenberg con el Hamiltoniano H_0. Calculando un valor medio en las representaciones de interacción y de Schrödinger, encontramos que

$$e^{-iH_0t/\hbar}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_I = e^{-iHt/\hbar}\left|\psi\left(0\right)\right\rangle \tag{50}$$

de donde es fácil ver que

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_I = H_{1I}\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle_I \tag{51}$$

donde

$$H_{1I}\left(t\right) = e^{iH_0t/\hbar}H_1e^{-iH_0t/\hbar} \tag{52}$$

es el Hamiltoniano de interacción H_1 en representación de interacción. H_{1I} es generalmente dependiente del tiempo, lo cual expresa el principio de conservación de la dificultad.

References

[1] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1994), sección 5.5.