Entropía de Hawking

15 de noviembre de 2023

1. Temperatura y periodicidad en el tiempo euclídeo

La mecánica cuántica implica una relación sorprendente entre la temperatura y el comportamiento de un campo no en el espacio físico, sino en un ficticio espacio *euclídeo*.

Supongamos que queremos calcular la función de partición de un campo cuántico. Entonces escribimos

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} \tag{1}$$

El operador $e^{-\beta H}$ se puede pensar como un operador de evolución $e^{-itH/\hbar}$ evaluado en un tiempo $t = -i\tau$ imaginario, con $\tau = \hbar\beta$. Pero si el tiempo es imaginario, entonces el signo menos en el intervalo de Minkowski desaparece: si $t = -i\tau$, entonces $-c^2 dt^2$ se convierte en $+c^2 d\tau^2$ y la métrica de Minkowski revierte a la métrica euclídea habitual en $\mathbf{R}^4$.

Ahora, sólo los elementos diagonales del operador evolución contribuyen a la función de partición. Eso quiere decir que estamos considerando una evolución en que el campo comienza en alguna configuración en $t = \tau = 0$, y vuelve a la misma configuración después de un tiempo euclídeo $\tau = \hbar\beta$. Dicho coloquialmente, un campo a temperatura T es un campo periódico en el tiempo euclídeo, con periodicidad $\tau = \hbar/k_B T$; a mayor temperatura, menor período [1].

Supongamos que un observador de Rindler quisiera usar este criterio para ver a qué temperatura se encuentra el campo (que nosotros sabemos que está en el estado de vacío *de Minkowski*). Entonces realiza la rotación de Wick $\theta \to -i\vartheta$, y su métrica se convierte en la métrica euclídea

$$ds_e^2 = \rho^2 d\vartheta^2 + d\rho^2 \tag{2}$$

De hecho esta es la métrica de un plano euclídeo, pero escrita en coordenadas polares, con ϑ como la variable angular, y por lo tanto con periodicidad 2π. El tiempo propio euclídeo $\rho\vartheta/c$ por lo tanto adquiere una periodicidad $2\pi\rho/c$. Todas las configuraciones no singulares del campo son periódicas, y el período nunca excede $2\pi\rho/c$

Por lo tanto para estos observadores no existen estados térmicos con $\hbar\beta > 2\pi\rho/c$. El *vacío de Minkowski* es el estado de máxima periodicidad. Corresponde a un estado térmico con temperatura $T = \hbar c/2\pi k_B \rho = \hbar a/2\pi k_B c$. Incidentalmente, la dependencia de la temperatura con la posición es la que se espera para un estado de equilibrio en un campo gravitatorio, de acuerdo a la *Ley de Tolman*, ver apéndice).

[1] Esto se ve claramente cuando uno usa una representación del operador de evolución como una integral de camino. Ver el capítulo 7 de los apuntes o [1, 2]

2. El agujero negro de Schwarzchild

2.1. Agujeros Negros Newtonianos

En física newtoniana, un objeto puntual de masa M (o una distribución de masa esféricamente simétrica, por el Teorema de Birkhoff) produce a su alrededor un potencial gravitatorio

$$\phi = -G\frac{M}{r} \tag{3}$$

donde G es la *constante de Newton*, que va a ser una gran protagonista de lo que viene. Una partícula de prueba de masa m sumergida en este campo adquiere una energía potencial gravitatoria $V = m\phi$. Por lo tanto, ϕ tiene unidades de velocidad al cuadrado, y

$$[G] = L^3T^{-2}M^{-1} \tag{4}$$

Exactamente, $G \approx 6\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}$. Esto es un número muy chico, lo cual va a ser importante en lo que sigue.

Si disparamos nuestra partícula de prueba radialmente a partir de una distancia R con velocidad inicial v_0, su trayectoria está determinada por la ley de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - G\frac{M}{R} \tag{5}$$

El hecho de que hayamos podido eliminar m expresa el principio de equivalencia. La partícula alcanza el infinito, si lo alcanza, con una velocidad

$$v_\infty^2 = v_0^2 - 2G\frac{M}{R} \tag{6}$$

La *velocidad de escape* v_e es la velocidad inicial necesaria para que el móvil apenas llegue al infinito ($v_\infty = 0$), es decir

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{7}$$

Claramente, si

$$R < \frac{2GM}{c^2} \tag{8}$$

entonces $v_e > c$, y un rayo de luz no alcanza la velocidad de escape. En este caso decimos que el cuerpo es un *agujero negro Newtoniano*.

2.2. El agujero negro de Schwarzschild

La métrica de Schwarzchild está caracterizada por el intervalo

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right]c^2dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2GM}{c^2r}\right]} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{9}$$

Es un espacio tiempo estático con simetría esférica, correspondiente a una solución de vacío en todo punto fuera del origen. El origen $r = 0$ es efectivamente una singularidad. El horizonte de eventos $R_S = 2GM/c^2$ o *radio de Schwarzchild*, en cambio, es sólo una singularidad de las coordenadas. Sin embargo, para $0 < r < r_S$ no puede haber observadores estacionarios, ya que el si $dr = d\theta = d\varphi = 0$, entonces $ds^2 > 0$. Como una trayectoria $r = r_S$ es una trayectoria nula, ninguna señal puede escapar del interior del horizonte.

Podemos pensar que la métrica de Schwarzchild describe el campo gravitatorio generado por algún cuerpo situado en el origen. Como la métrica es esféricamente simétrica, cabe esperar que el cuerpo fuente también lo es. Si el radio del cuerpo es menor que el radio de Schwarzchild, el cuerpo es efectivamente un agujero negro, ya que ninguna señal puede escapar de su superficie. Comparando con el radio de un agujero negro Newtoniano, concluimos que M es efectivamente la masa del cuerpo.

Una manera simple de ver que el radio de Schwarzchild define un horizonte es ver el comportamiento de los rayos de luz. Un rayo de luz se caracteriza porque el intervalo a lo largo del rayo se anula, $ds^2 = 0$. Si consideramos una trayectoria radial por simplicidad ($\theta = \varphi =$ constantes) la trayectoria del rayo obedece la ecuación

$$cdt = \pm \frac{dr}{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]} \tag{10}$$

Vemos que hay dos familias de soluciones, las soluciones con $u =$ constante y las soluciones con $v =$ constante, donde (poniendo $G = c = 1$)

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2M \ln (r - 2M) \\ v &= t + r + 2M \ln (r - 2M) \end{aligned} \tag{11}$$

Cuando $r \gg 2M$ convergen a los rayos de luz del espacio de Minkowski.

Si representamos el espacio de Minkowski en el plano (r, v), vemos que las líneas horizontales son rayos de luz, extendiéndose todo el camino hasta $r = 0$. La otra familia de rayos de luz es

$$v = u + 2 \left(r + 2M \ln (r - 2M)\right) \tag{12}$$

con $u =$ constante. Vemos que para todos estos rayos $r \to 2M$ cuando $v \to -\infty$. La línea $r = 2M$ es ella misma un rayo, lo cual es más fácil de ver en la forma original 9 del intervalo. Además, si admitimos que la constante u sea compleja, también podemos tener rayos *dentro* del horizonte, Estos rayos comienzan en $r = 2M$ cuando $v \to -\infty$ y alcanzan $r = 0$ en un valor finito de v. $r = 0$, y no $r = 2M$, es donde hay una verdadera singularidad.

Como la trayectoria de un observador físico siempre corresponde a $ds^2 < 0$, vemos que un observador que comience en el horizonte debe atravesarlo, y luego irremediablemente alcanzar la singularidad en $r = 0$ en un tiempo finito.

2.3. Los agujeros negros y la Segunda Ley

La superficie $r = R_S, t, \theta, \varphi$ cualquiera define el *horizonte* del agujero negro. Cualquier señal originada dentro del horizonte permanecerá allí para siempre, ya que para atravesar el horizonte debería moverse más rápido que la luz. En cambio, es posible *caer* en el horizonte desde afuera.

Esta propiedad de los agujeros negros plantea un desafío a la Segunda Ley, porque si un objeto atraviesa el horizonte, e ipso facto se pierde para siempre desde el punto de vista de un observador fuera (mas bien lejos) del agujero, entonces ¿qué pasa con la entropía de ese objeto? Parecería ser que se pierde junto con el objeto, y en ese caso la entropía del Universo (al menos, la del Universo sensible) disminuría, violando la desigualdad de Clausius.

La salida del atolladero es que el agujero negro posee una entropía intrínseca, que aumenta cada vez que el agujero engulle algún objeto. Nótese que un objeto ordinario puede estar en muchos estados, caracterizados por su volumen, presión, temperatura, etc., cada uno con su correspondiente entropía. El estado del agujero, en cambio, queda definido por el único parámetro que es su masa M (*los agujeros negros no tienen pelos*)[2]. Su entropía debe ser una función de M.

Por otro lado, podemos asignar una temperatura al agujero observando que la continuación euclídea del agujero es periódica en el tiempo, como la cuña de Rindler. Efectivamente, si ponemos $d\theta = d\varphi = 0$, cerca del horizonte tenemos la métrica euclídea, para $r \geq R_S$,

$$ds_e^2 = c^2 \left(\frac{r}{R_s} - 1 \right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\frac{r}{R_s} - 1} \tag{13}$$

Empezamos definiendo una nueva coordenada radial ρ tal que

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{R_s} - 1}} \tag{14}$$

con $\rho = 0$ en $r = R_S$; efectivamente

$$\rho = 2R_S \sqrt{\frac{r}{R_s} - 1} \tag{15}$$

y ahora la métrica euclídea es

$$ds_e^2 = \frac{c^2}{4R_S^2} \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \tag{16}$$

que es la métrica de un plano euclídeo en que $c\tau/2R_S$ es el ángulo polar. Por lo tanto τ tiene periodicidad $4\pi R_S/c$. Cuando un observador da la vuelta al plano euclídeo, el período medido en tiempo propio es

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \frac{4\pi R_S}{c} \tag{17}$$

y por lo tanto identificando la temperatura $\beta\hbar$ con la periodicidad en el tiempo euclídeo, encontramos

$$T = \frac{T_H}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \tag{18}$$

consistente con la Ley de Tolman, con

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G} \frac{1}{M} \tag{19}$$

Un agujero negro de una masa solar tiene una temperatura de 60 nano Kelvin.

Ahora podemos relacionar la energía $E = Mc^2$, la entropia y la temperatura del agujero mediante

$$T \frac{dS}{dT} = \frac{dE}{dT} \tag{20}$$

Obtenemos

$$S_{BH} = \frac{\hbar c^5}{16\pi k_B G T_H^2} \tag{21}$$

[2]En realidad, un agujero negro puede rotar y puede estar cargado. Por lo tanto, su estado queda determinado por su masa, su carga y su momento angular. Pero aquí se termina la lista de posibilidades.

Recalculando
$$S_{BH} = \frac{1}{4} k_B \frac{A_{BH}}{L_P^2} \tag{22}$$
donde $A_{BH} = 4\pi R_S^2$ es el área del horizonte y $L_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ es la longitud de Planck.

Ahora vemos que cuando el agujero absorbe una masa m, su energía aumenta en mc^2, pero su entropía aumenta en
$$dS_{BH} = 8\pi k_B \left(\frac{M}{M_P^2}\right) m = \frac{mc^2}{T_{BH}} \tag{23}$$
La *Segunda Ley Generalizada* afirma que el aumento de la entropía del agujero siempre sobrecompensa la pérdida de la entropía del objeto; discutiremos más sobre esto en la próxima entrega.

3. De la entropía de Hawking a la conjetura de Maldacena

El aspecto más inusual de la entropía de Hawking es que escalea como el *área*, en vez de como el *volumen*, del agujero negro, en aparente violación de la aditividad de la energía. Es decir, si creemos que la entropía de Hawking está contando los grados de libertad de "algo" que está dentro del horizonte [3], esperamos que los grados de libertad escaleen como el volumen. Sin embargo, la entropía de Hawking va como el área.

Una posible explicación es que en realidad el número de grados de libertad en volumen y en superficie son los mismos; en la superficie encontramos una representación *holográfica* de lo que ocurre en el volumen, de manera que hay una correspondencia entre los grados de libertad de la superficie y los del volumen.

La *conjetura de Maldacena* afirma que en esto, los agujeros negros no son la excepción sino la regla. Nuestro espacio-tiempo y la materia que contiene son a su vez una representación holográfica de una teoría en un espacio tiempo de dimensión superior, del cual nuestro Universo es la frontera. El logro de Maldacena fue presentar el primer ejemplo concreto de realización de una *dualidad* entre una teoría en una variedad y otra en el borde de la misma variedad [4].

Una de las instancias más estudiadas de dualidad pone por un lado una teoría invariante conforme en el espacio de Minkowski, y como teoría dual a gravedad en 5 dimensiones, en presencia de una constante cosmológica negativa, lo cual conduce a un *Espacio tiempo Anti- De Sitter*. Una teoría invariante conforme posee una única escala, de manera que todos los parámetros adimensionales son invariantes de escala. El modelo estandard de partículas elementales posee múltiples escalas (las masas de los quarks, la temperatura a la que se produce la transición de desconfinamiento, entre otras) y por lo tanto NO es invariante conforme. Sin embargo, puede pensarse que es aproximadamente invariante conforme en el límite de muy altas temperaturas. Para introducir la temperatura, tal como hicimos en esta clase, se coloca un agujero negro en el centro del anti- De Sitter.

La utilidad práctica de la dualidad es que cálculos no perturbativos en una teoría pueden ser perturbativos en la teoría dual, lo cual permite calcular propiedades de ambas teorías previamente inaccesibles. Un ejemplo concreto fue el cálculo de la viscosidad de un plasma fuertemente acoplado a altas temperaturas [5]. Para una introducción sistemática a este problema ver [6].

---

[3] Para cierto tipo de agujeros negros, es efectivamente posible vincular la entropía de Hawking con los grados de libertad del agujero, ver [3]

[4] Una de las primeras presentaciones de la conjetura tuvo lugar en el encuentro *Quantum Gravity in the Southern Cone*, Bariloche, Enero de 1998 [4].

Apéndice: la ley de Tolman

Consideremos un espacio-tiempo estático, es decir que el intervalo

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \tag{24}$$

Lo que hace que el espacio sea estático es que la métrica NO depende del tiempo y $g_{0i} = 0$. Los espacio tiempo de Rindler y de Schwarzchild son estáticos.

Un rayo de luz sigue una trayectoria (supongamos que se desplaza en la coordenada x^1, por simplicidad)

$$dt = \sqrt{\frac{g_{11}}{-g_{00}}}\, dx^1 \tag{25}$$

La solución es de la forma

$$t = t_0 + F\left(x^1\right) \tag{26}$$

Si ahora miramos dos crestas de la misma onda, concluimos que la diferencia *en tiempo coordenado* entre los tiempos de arribo de una y otra cresta a un punto dado permanece constante a lo largo del rayo. Pero entonces la diferencia *en tiempo propio* es diferente en cada punto. concretamente, si la diferencia en tiempo coordenado es dt, la diferencia en tiempo propio es $\sqrt{-g_{00}(x)}\ dt$. La diferencia en tiempo propio es el período físico de la onda, y por lo tanto su inversa es la frecuencia de la onda. Si en vez de una única onda tengo un gas de fotones, la temperatura en cada punto es proporcional a la frecuencia pico del espectro, y por lo tanto

$$T(x) = \frac{T_0}{\sqrt{-g_{00}(x)}} \tag{27}$$

con $T_0 =$ constante. Esta es la Ley de Tolman. Nótese que tanto las temperaturas de Unruh como de Hawking obedecen esta ley.

Por la Ley Cero, un sistema en equilibrio con la radiación tiene la misma temperatura, y por lo tanto obedece la misma Ley.

Apéndice: El agujero negro de Kerr

Vamos a poner a prueba el esquema tratando de ver si es posible asignarles una temperatura y una entropía al agujero negro de Kerr

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left[cdt - a\sin^2\theta d\varphi\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)d\varphi - acdt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{28}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2\frac{GM}{c^2}r + a^2 \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta \end{aligned} \tag{29}$$

La métrica de Kerr describe un agujero negro rotante. Tiene dos parámetros, que identificamos como la masa M y el momento angular $J = acM$. Los horizontes están asociados a los ceros de Δ. Por lo tanto hay dos horizontes

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left[R_S \pm \sqrt{R_S^2 - 4a^2}\right] \tag{30}$$

donde $R_S = 2GM/c^2$. Es necesario que $R_S^2 > 4a^2$. La verdadera singularidad está en $r = 0$, $\theta = \pi/2$.

La velocidad angular del agujero negro es

$$\Omega = -\left.\frac{g_{tt}}{g_{t\varphi}}\right|_{r=r_+} = -\left.\frac{\rho^2 - 2Mr}{2Mar\sin^2\theta}\right|_{r=r_+} = \frac{a}{2Mr_+} \tag{31}$$

y el área del horizonte es

$$A = \int d\theta d\varphi\,\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} = 4\pi\left(2Mr_+\right) \tag{32}$$

En la región $0 < \Delta < a^2\sin^2\theta$, conocida como *ergosfera*, el vector de Killing $(1, \mathbf{0})$ es espacial. En esta región una partícula puede tener energía negativa. El *proceso de Penrose* aprovecha esta posibilidad para extraer energía del agujero. La idea es lanzar una partícula desde el infinito hasta la ergosfera, donde se fisiona en dos partículas, una de energía positiva (mayor que la de la partícula original) y otra de energía negativa. La partícula de energía negativa cae al agujero, mientras que la otra escapa nuevamente al infinito, con lo cual hay una pérdida neta de energía del agujero.

3.1. ¿Termodinámica de agujeros negros?

Una de las interpretaciones posibles de Ω es que ΩdJ es el trabajo necesario para cambiar el momento angular del agujero negro "adiabáticamente", aunque no está muy claro qué quiere decir adiabático en este contexto. Efectivamente, si formamos la forma diferencial

$$\varpi = dM - \Omega dJ \tag{33}$$

está claro que no es un diferencial exacto, ya que si lo fuera tendría que ser $\partial\Omega/\partial M = 0$ a J constante, y evidentemente no lo es. Sin embargo, admite un factor integrante

$$dM - \Omega dJ = TdS \tag{34}$$

lo cual no es sorprendente porque todas las formas en dos dimensiones admiten uno. La idea es ver qué candidatos hay para "T" y "S".

En vez de tomar J como variable independiente, es mejor tomar r_+. Entonces

$$\varpi = dM - \Omega\left(adM + Mda\right) = \left[1 - a\Omega\right]dM - M\Omega da \tag{35}$$

Ahora

$$r_+^2 - 2Mr_+ + a^2 = 0 \tag{36}$$

$$ada = r_+ dM - \left(r_+ - M\right)dr_+ \tag{37}$$

y

$$\varpi = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{r_+}{M} - 1\right]dM + \left[1 - \frac{M}{r_+}\right]dr_+\right\} \tag{38}$$

En este punto conviene definir $M = xy$, $r_+ = x/y$,

$$\varpi = \left[\frac{1}{y} - y\right] dx \tag{39}$$

Entonces tenemos la libertad de definir $S = f(x)$, en cuyo caso $T = \left[\frac{1}{y} - y\right] / f'(x)$. Ahora $x = \sqrt{Mr_+} = \sqrt{A/8\pi}$. Si simplemente tomamos $S = A/4$, o sea $f(x) = 2\pi x^2$, entonces

$$T = \frac{1}{4\pi\sqrt{Mr_+}}\left[\sqrt{\frac{r_+}{M}} - \sqrt{\frac{M}{r_+}}\right] \tag{40}$$

En el límite de Schwarzchild $a \to 0$, $T \to 1/8\pi M$. De hecho la temperatura 40 es la que se deduce de pedir periodicidad en el espacio de Kerr euclídeo.

En el límite $a \to M$, $T \to 0$, lo cual abre la discusión acerca de si hay una “Tercera Ley” de la termodinámica de agujeros negros.

Referencias

[1] R. Feynman, *Statistical Physics* (Benjamin-Cummings, Reading, 1972).

[2] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration* (John Wiley, New York, 1981).

[3] Andrew Strominger y Cumrun Vafa, Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy, Physics Letters B 379, 99 (1996).

[4] Juan Maldacena, The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, en *Quantum Gravity in the Southern Cone*, editado por M. Castagnino y C. Núñez, Int. J. Theor. Phys. 38, 4 (1999), p. 1113.

[5] G. Policastro, D. T. Son y A. O. Starinets, The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma’ Phys. Rev. Lett. 87, 081601 (2001).

[6] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge-gravity duality : foundations and applications*, Cambridge U. P., Cambridge (UK) (2015).