La Segunda Ley Generalizada

November 17, 2023

1 Equilibrio agujero negro-radiación

Para cerrar este bloque, vamos a discutir los argumentos en favor de identificar la entropía de Bekenstein con la entropía termodinámica, en el caso de un agujero negro de Schwarzchild.

Es interesante notar que, de acuerdo con estas expresiones, un agujero negro tiene un calor específico negativo

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{-\hbar c^5}{8\pi k_B G T^2} \tag{1}$$

Esto muestra que un agujero negro nunca puede alcanzar un equilibrio estable si está en contacto con un baño térmico. Si por una fluctuación la temperatura del agujero cae por debajo de la del baño, entonces el agujero va a absorber calor, pero éso hace que su temperatura disminuya todavía más, dando lugar a un ciclo con realimentación positiva. Lo mismo ocurre para una fluctuación de signo contrario.

En cambio, sí puede alcanzar un equilibrio microcanónico, es decir, cuando la energía total del agujero y su entorno es finita. Para dar un ejemplo sencillo, consideremos un agujero de masa M y temperatura T_{BH} acoplado a una caja de volumen V que contiene radiación a temperatura T_γ. La energía total del sistema es

$$E_T = \frac{\hbar c^5}{8\pi k_B G T_{BH}} + V\sigma T_\gamma^4 \tag{2}$$

donde

$$\sigma = \frac{3}{\pi^2}\frac{k_B^4}{\hbar^3 c^3} \tag{3}$$

es la constante de Stefan-Boltzmann, y la entropía total es

$$S_T = \frac{\hbar c^5}{16\pi k_B G T_{BH}^2} + \frac{4}{3}V\sigma T_\gamma^3 \tag{4}$$

Para continuar, es conveniente adoptar *unidades naturales*, es decir, poner $G = \hbar = c = k_B = 1$, $\sigma = 3/\pi^2$. Entonces

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{8\pi T_{BH}} + \sigma V T_\gamma^4 \\ S_T &= \frac{1}{16\pi T_{BH}^2} + \frac{4}{3}\sigma V T_\gamma^3 \end{aligned} \tag{5}$$

$\sigma = 3/\pi^2$ en unidades naturales.

Como la energía y la entropía son aditivas, en equilibrio $T_{BH} = T_\gamma$. Consideremos una fluctuación en que el agujero negro absorbe una cantidad de energía dE a expensas de la radiación. Entonces

$$\begin{aligned} dS &= dS_{BH} + dS_\gamma \\ &= \frac{dE_{BH}}{T_{BH}} + \frac{dE_\gamma}{T_\gamma} \\ &= \left(\frac{1}{T_{BH}} - \frac{1}{T_\gamma}\right) dE \end{aligned} \tag{6}$$

En equilibrio, debe ser $dS = 0$ a primer orden en dE, y por lo tanto la igualdad de temperaturas.

La pregunta siguiente es si el equilibrio es estable o inestable. Será estable si $dS < 0$, e inestable en caso contrario. Efectivamente, como en el caso en que el agujero negro estaba en contacto con un baño térmico, al absorber energía el agujero se va a enfriar. Pero ahora es posible revertir el flujo de energía si la radiación se enfría *todavía más*. Calculando un orden más en el desarrollo de dS en potencias de dE tenemos

$$\begin{aligned} dS &= dS_{BH} + dS_\gamma \\ &= \left(\frac{dS_{BH}}{dE_{BH}} - \frac{dS_\gamma}{dE_\gamma}\right) dE + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2S_{BH}}{dE_{BH}^2} + \frac{d^2S_\gamma}{dE_\gamma^2}\right) dE^2 \end{aligned} \tag{7}$$

El primer orden se anula, y el segundo da

$$= \frac{-1}{2T^2}\left(\frac{dT_{BH}}{dE_{BH}} + \frac{dT_\gamma}{dE_\gamma}\right) dE^2 \tag{8}$$

($T = T_{BH} = T_\gamma$ en el punto de equilibrio). O sea, el equilibrio es estable si

$$\frac{dT_{BH}}{dE_{BH}} + \frac{dT_\gamma}{dE_\gamma} > 0 \tag{9}$$

Para el agujero negro, $dT_{BH}/dE_{BH} < 0$ y $dE_{BH} = dE > 0$, por lo que $dT_{BH} = (dT_{BH}/dE_{BH})\, dE < 0$. Para la radiación, $dT_\gamma/dE_\gamma > 0$ y $dE_\gamma = -dE < 0$, por lo que efectivamente estamos pidiendo $dT_\gamma = -(dT_\gamma/dE_\gamma)\, dE < dT_{BH} < 0$.

Por otro lado, la derivada de la temperatura respecto de la energía es la inversa del calor específico, de modo que

$$dS = \frac{-1}{2T^2 C_{BH} C_\gamma}\left(C_{BH} + C_\gamma\right) dE^2 \tag{10}$$

Como $C_{BH} < 0$ mientras que $C_\gamma > 0$, el equilibrio es estable si $C_{BH} + C_\gamma < 0$ o $C_\gamma < |C_{BH}|$. Reemplazando

$$\begin{aligned} C_{BH} &= \frac{-1}{8\pi T^2} \\ C_\gamma &= 4\sigma V T^3 \end{aligned} \tag{11}$$

La condición de equilibrio es

$$x < x_{cr} = \left(\frac{1}{32\pi\sigma}\right)^{1/5} \tag{12}$$

donde $x = V^{1/5}T$. Por otro lado, si escribimos la energía total como $E_T = yV^{1/5}$, entonces

$$y = \frac{1}{8\pi x} + \sigma x^4 \tag{13}$$

Observamos que $dy/dx < 0$ para $x < x_{cr}$, por lo tanto la condición de equilibrio también puede frasearse como

$$y > y\left(x_{cr}\right) = \frac{1}{8\pi x_{cr}} + \sigma x_{cr}^4 = \frac{5}{32\pi}\left(32\pi\sigma\right)^{1/5} \tag{14}$$

Para valores de y en este rango hay un segundo punto de equilibrio, pero es inestable. Si $y < y_{cr}$ no hay equilibrio posible con coexistencia de radiación y agujero negro.

2 Agujeros negros y máquinas térmicas

En el rango en que el agujero negro y la radiación están en equilibrio estable, podemos pensar en utilizar la caja como la sustancia de trabajo en un ciclo de Carnot.

Empecemos considerando la caja sin el agujero negro. El ciclo empieza con la radiación a temperatura T_A y volumen V_A. Entonces se expande isotérmicamente hasta un volumen V_B. Como las densidades de energía y entropía permanecen constantes, el cambio de energía es $\Delta E_{AB} = \sigma T_A^4\left(V_B - V_A\right)$, el calor absorbido es $Q_1 = T_A \Delta S_{AB} = (4/3)\,\Delta E_{AB}$, y el trabajo realizado es $W_{AB} = P\left(V_B - V_A\right) = (1/3)\,\Delta E_{AB}$.

En el segundo tramo la radiación se expande adiabáticamente desde V_B hasta $V_C > V_B$, donde la temperatura es $T_C = T_A\left(V_B/V_C\right)^{1/3}$. Como no se intercambió calor, toda la pérdida de energía es trabajo realizado, es decir

$$W_{BC} = -\Delta E_{BC} = \sigma T_A^4 V_B\left[1 - \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{1/3}\right] \tag{15}$$

El próximo vértice del ciclo tiene que pertenecer a la misma isoterma que C, o sea $T_D = T_C$, y a la misma adiabática que A, o sea que $T_D = T_A\left(V_A/V_D\right)^{1/3}$. Por lo tanto $V_D = \left(V_C/V_B\right)V_A$. En este tramo se ventea un calor $Q_2 = (4/3)\,\sigma T_C^4\left(V_C - V_D\right)$. La eficiencia del ciclo es

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_C^4\left(V_C - V_D\right)}{T_A^4\left(V_B - V_A\right)} = 1 - \frac{T_C^4 V_C}{T_A^4 V_B} = 1 - \frac{T_C}{T_A} \tag{16}$$

Por el Teorema de Carnot, la presencia del agujero negro no debería modificar este resultado. Efectivamente, para el agujero una isoterma *es* una adiabática, de manera que el calor intercambiado en un proceso isotérmico se debe solamente al intercambio con la radiación, es decir $Q = (4/3)\,\sigma T^4\left(V_f - V_i\right)$.

La presencia del agujero en cambio afecta las adiabáticas, porque ahora debe conservarse la entropía total y no sólo la de la radiación. Sin embargo, recordemos que $T_D = T_C$ y $T_B = T_A$. Como D y A pertenecen a la misma adiabática,

$$\frac{1}{16\pi T_C^2} + \frac{4}{3}\sigma V_D T_C^3 = \frac{1}{16\pi T_A^2} + \frac{4}{3}\sigma V_A T_A^3 \tag{17}$$

Por el mismo motivo, tenemos que

$$\frac{1}{16\pi T_C^2} + \frac{4}{3}\sigma V_C T_C^3 = \frac{1}{16\pi T_A^2} + \frac{4}{3}\sigma V_B T_A^3 \tag{18}$$

restando, encontramos que sigue valiendo que

$$T_C^3\left(V_C - V_D\right) = T_A^3\left(V_B - V_A\right) \tag{19}$$

que es suficiente para establecer que la eficiencia es consistente con el Teorema de Carnot.

3 El Proceso de Geroch

La posibilidad de violar la Segunda Ley simplemente vertiendo entropía en un agujero negro ha sido tanto una motivación para la propuesta de Bekenstein de la necesidad de que el agujero posea una entropía intrínseca, como un *leit motiv* en todo el desarrollo ulterior del tema. El punto en debate es si la entropía de Bekenstein *es* o sólo *es análoga a* la entropía termodinámica.

En su versión más simple, el Proceso de Geroch consiste en tirar al agujero negro un objeto ("la caja") conteniendo una energía E_C y una entropía S_C. Si $S_C > E_C/T_{BH}$, el aumento de entropía del agujero no compensa la pérdida de la entropía de los contenidos de la caja, y se viola la Segunda Ley. Una primer respuesta es plantear que existe un límite a la entropía que puede poseer un cuerpo de energía dada. Sin embargo, un refinamiento del argumento inicial muestra que es poco probable que cotas de este tipo resuelvan la objeción.

Efectivamente, la idea es tener cuidado de descender la caja hacia el agujero de manera cuasi estacionaria. Un objeto estacionario alrededor de un agujero negro (es decir, que su tetra velocidad es $u^\mu = \left((-g_{00})^{-1/2}, \mathbf{0}\right)$) está siguiendo una trayectoria acelerada, con aceleración

$$a^\mu = c^2 u^\nu \nabla_\nu u^\mu = c^2 \Gamma^\mu_{00} \left(-g_{00}\right)^{-1} \tag{20}$$

La única componente no nula es radial y vale

$$a = \frac{GM}{r^2} \tag{21}$$

La fuerza necesaria para mantener al objeto estacionario es ma. Si en cambio se deja descender lentamente al objeto, la fuerza sigue siendo ma para todos los fines prácticos. El trabajo realizado por el objeto al descender desde infinito hasta una distancia R del agujero es

$$W\left[R\right] = \int_R^\infty \sqrt{g_{11}} dr \; ma = mc^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}\right] \tag{22}$$

Presumiblemente, esta energía fue sustraída de la energía de la caja; si $R \to R_S$, habríamos extraído la totalidad de la energía inicial. Por lo tanto, independientemente del contenido de entropía de la caja, pareciera ser que su contenido de energía puede hacerse arbitrariamente bajo.

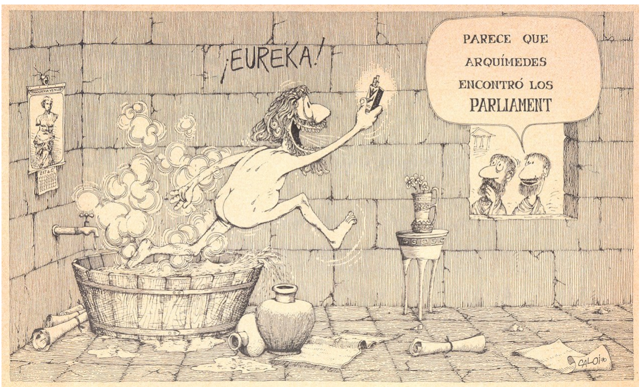

Figure 1: Arquímedes encuentra la manera de refutar la objeción de Geroch a la identificación de la entropía de Bekenstein con la entropía termodinámica

Este argumento no tiene en cuenta que el agujero está rodeado por una atmósfera de radiación a la temperatura T_{BH}, y que por lo tanto, al descender, la caja encuentra una resistencia dada por el principio de Arquímedes. Es decir, la caja desciende sólo hasta el punto en que la masa contenida en la caja es igual a la masa de la radiación de Hawking contenida en el volumen de la caja. Si se descarga el contenido de la caja en el agujero negro, desde el punto de vista del agujero es lo mismo que si la caja hubiera estado llena de radiación todo el tiempo, y como están en equilibrio, la entropía del agujero crece tanto como la entropía de la radiación. Ahora, para que el contenido de la caja efectivamente caiga al agujero cuando se abre la caja, dejando que ésta se llene de radiación, debe ser termodinámicamente favorable sustituir uno por otro, y eso requiere que la entropía original no supere la entropía de la radiación. De esa manera se satisface la Segunda Ley.

4 Continúe participando

Terminamos mencionando dos temas que son áreas activas de investigación.

4.1 Evaporación de agujeros negros

Este modelo de juguete muestra que si colocamos al agujero negro en contacto con la caja inicialmente vacía, entonces el agujero negro se va a *evaporar*, total o parcialmente, hasta que se establezca el equilibrio con la radiación. Se puede demostrar que el agujero negro se comporta como un *cuerpo negro*, es decir, que emite en todas las frecuencias de acuerdo con la fórmula de Planck.

Concretamente, si la densidad de energía de radiación es σT^4, entonces el flujo de energía es $c\sigma T^4$ y la potencia emitida por el agujero es $4\pi R_S^2 c\sigma T^4$. El agujero se va a evaporar con una tasa

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{K}{3M^2} \tag{23}$$

donde K involucra sólo constantes universales. La integral de esta ecuación es

$$M(t) = M(0)\left[1 - \frac{K}{M^3(0)}t\right]^{1/3} \tag{24}$$

Un agujero negro en vacío, por lo tanto, se evapora íntegramente en un tiempo finito. Exactamente qué ocurre después es una frontera activa de investigación.

4.2 Cotas a la entropía

Si un agujero negro posee una entropía $A/4$ (en unidades de Planck), parecería que es imposible que un volumen cualquiera, cuyo borde tenga área A, contenga una entropía mayor. Si lo fuese, bastaría agregar energía hasta provocar el colapso del sistema en un agujero negro, lo cual haría disminuir la entropía y violaría la Segunda Ley. Lo notable es que ahora estamos hablando de sistemas ordinarios, cuya entropía cuenta el número de configuraciones. De alguna manera, el área del borde determina los grados de libertad en el interior del volumen. ¿cómo?

References

[1] B. Schutz, *A first course in General Relativity* (3ra edición, Cambridge UP, Londres, 2022).

[2] J. Hartle, *Gravity* (Addison-Wesley, Nueva York, 2003).

[3] R. M. Wald, *General Relativity* (U. of Chicago Press, Chicago, 1984).

[4] Ch. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1970).

[5] L. Landau y E. Lifchitz, *Physique Théorique Tome 2: Théorie des champs* (Mir, Moscú, 1964).

[6] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (U. of Chicago Press, Chicago, 1994).

[7] T. Jacobson, Introductory lectures on black hole thermodynamics (1996), en línea: http://www.physics.umd.edu/grt/taj/776b/lectures.pdf

[8] W. Unruh, Black holes, dumb holes, and entropy, en C. Callender y N. Huggett, *Physics meets philosophy at the Planck scale* (Cambridge U. P., Londres, 2004).