Teoría Cuántica de Campos

Guía 2: Formulación Lagrangiana
Primer Cuatrimestre 2015

1. Considere el Lagrangiano:

$$L = i\psi\partial_t\psi^* - \frac{1}{2m}\nabla\psi.\nabla\psi - V\psi\psi^*$$

para un campo ψ con V una función del espacio.

   (a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ψ y muestre que esta es la ecuación de Schrodinger para ψ, siendo V el potencial.

   (b) Encuentre la carga conservada asociada a la invariancia ante traslaciones temporales. Interprete el resultado como el valor medio de un operador.

2. Considere la densidad Lagrangiana $L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, con ϕ real.

   (a) Derive la expresión del Hamiltoniano y el momento usando el teorema de Noether..

   (b) Encuentre la energía para una solución generica y muestre que es definida positiva.

   (c) Encuentre el momento para una solución generica.

3. Considere el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \frac{m^2}{2}\phi\phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo.

   (a) escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuacion de Klein-Gordon.

   (b) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento en que el ejercicio anterior.

   (c) Obtenga la expresión para la energía y muestre que soluciones de frecuencia positiva y negativa contribuyen positivamente.

   (d) Encuentre la corriente y carga de Noether asociada a la simetría $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ con α una constante real.

4. En la naturaleza existen tres tipos de piones que se pueden describir con campos escalares $\phi_a, a = 1, 2, 3$ que interaccionan con una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{1}{2}m^2\phi_a^2 - \lambda(\phi_a^2)^2$$

   (a) Verifique que este lagrangiano es invariante ante transformaciones internas de los campos (llamadas de isospin)

$$\phi_a \to \phi'_a = A_{ab}\phi_b$$

   donde A es una matriz ortogonal (rotaciones internas). Calcule las corrientes de Noether $j^a_\mu(x)$ y las cargas $Q^a = \int d^3x j^a_0(x,t)$.

5. Considere el Lagrangiano:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

   (a) Muestre que para $m \neq 0$ no es una simetría la transformación $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ con Λ función arbitraria del espacio tiempo.

   (b) Muestre que para $m \neq 0$ las ecuaciones de movimiento fuerzan a que el campo cumpla la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$.

6. Considere el Lagrangiano de un campo escalar complejo acoplado al electromagnetismo. La invariancia del lagrangiano frente a transformaciones de simetría globales implica la conservación de la carga. Existen nuevas corrientes conservadas a las simetrías *locales*?

7. Considere el lagrangiano de Dirac y las siguientes transformaciones de los espinores:

$$\Psi \to e^{i\alpha}\Psi \qquad \Psi \to e^{i\beta\gamma_5}\Psi$$

   (a) Construya las corrientes de Noether asociadas a estas transformaciones. ¿En qué casos se conservan?

   (b) Escriba las transformaciones y las corrientes en términos de los espinores ϕ_R y ϕ_L

   (c) Analice la conservación de las corrientes para fermiones no masivos acoplados al electromagnetismo.