Teoría Cuántica de Campos

Guía 3A: Cuantización canónica del campo de Klein-Gordon
Primer Cuatrimestre 2015

1 Prelimimares: espacio de Hilbert de 1-partícula, espacio de Fock

1. Dadas dos funciones f_1 y f_2 de las componentes espaciales k^i del cuadrivector $(\omega(k), k)$ (con $\omega(k) \equiv \sqrt{m^2 + k^2}$ $(m \neq 0)$), verifique que la integral $(f_1, f_2) \equiv \int f_1^*(k) f_2(k) \frac{d^3k}{\omega(k)}$ es invariante de Lorentz.

2. **Espacio de Hilbert de estados de "1-particula"** Considere el estado $a_k^\dagger 0|\rangle$ siendo $|0\rangle$ el vacio y $a_k^\dagger$ el operador de creación del campo escalar neutro de Klein-Gordon.

   (a) Muestre que este es autoestado del operador momento del campo.

   (b) Halla la expresion del producto interno entre $a^\dagger{}_k|0\rangle$ y $a^\dagger{}_{k'}|0\rangle$.

   (c) Considere ahora dos funciones de R^3 f_1 y f_2. Halle el producto producto interno entre los estados: $\int f_1(k) a_k^\dagger \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} |0>$ y $\int f_2(k) a_k^\dagger \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} |0>$ y exprese el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2. Compare este producto interno con el del ejercicio 1.

   (d) Usando el producto interno previamente definido, escriba la expresión del producto interno entre estados genericos de 2-particulas.

3. Muestre que para todo estado $| \xi_n \rangle$ correspondiente a n-particulas, el valor de expectación de $\langle \xi_n | \hat{\Phi}(x) | \xi_n \rangle$ es igual a cero. Como construiría entonces un estado $|\xi\rangle$ tal que el valor de expectación de $\langle \xi | \hat{\Phi}(x) | \xi \rangle$ sea igual a una función del espacio-tiempo $\Phi(x)$ no-nula? (ayuda: recuerde la construcción de estado analogos en el caso del oscilador armonico)

4. Usando la definición del operador de carga Q para un campo de Klein-Gordon complejo, mustre que los estados $| p^+ > \equiv a_p^\dagger | 0 >$ y $| p^- > \equiv b_p^\dagger | 0 >$ tienen autovalor de Q de signos opuestos.

5. Definiendo $\Psi^+_{(p)}(x) \equiv <p^+ | \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 >$ y $\Psi^-_{(p)}(x) \equiv <p^- | \hat{\Phi}(x) | 0 >$:

6. (a) muestre que las funciones $\Psi_p^\pm$ satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Cuales son las frecuencias de estas soluciones?

   (b) Halle el valor medio del operador momento del campo en el el estado $\hat{\Phi}(x) \mid 0\rangle$ en terminos de la función Ψ y justifique la interpretación de esta como función de onda en el espacio de momentos.

2 Función de 2 puntos, conmutador, propagador

7. Considere el campo a tiempo cero suavisado por una función espacial $\hat{\Phi}_0(h) \equiv \int \hat{\Phi}(x, 0) h(x) d^3x$.

   (a) Halle la expresion de $\hat{\Phi}_0(h)$ como integral en los momentos de la transformada de Fourier espacial $\hat{h}$.

   (b) Usando las reglas de conmutación de los operadores de creacion y aniquilación, calcule el producto interno entre un estado $\hat{\Phi}_0(h_1)|0>$ y $\hat{\Phi}_0(h_2)|0>$ y compare con el producto interno definido en el ejercicio 1.

   (c) Recupere a partir de la expresion anterior la expresion de $< 0 | \hat{\Phi}(x, 0)\hat{\Phi}(y, 0) | 0 >$.

8. Halle la expresión de la *función de dos puntos* $< 0 | \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y) | 0 >$ donde ahora x e y son puntos del espacio tiempo arbitrarios como integral en los momentos

9. Halle ahora la expresión del conmutador $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)]$ como una integral en los momentos.

10. **Condición de microcausalidad** Muestre que el conmutador anterior es cero para x e y espacialemente separados, es decir para $(x - y)^2 < 0$.

11. **Idea de demostración del teorema spin-estadistica**. Suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anti-conmutación. Muestre que el anticonmutador es diferente de cero para puntos espacialemente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba esta como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas).

12. Calcule los conmutadores $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(y)]$ y $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)]$ para un campo campo de Klein-Gordon complejo. Halle tambien la función de 2 puntos $< 0 \mid \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}^\dagger(y) \mid 0 >$

13. **Propagador del oscilador armonico cuántico** Considere la cuantización canónica de un oscilador armonico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

    (a) Calcule la función de dos variables $< 0|\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)|0 >$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0 >$ el estado de vacio.

    (b) Muestre que la función $i < 0|T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2))|0 >$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del parentesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

14. (a) Calcule

    $$\langle 0|T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y))|0\rangle$$

    escribiendo $\hat{\Phi}$ en términos de a_k y $a_k^\dagger$. Demuestre que es igual a la transformada de Fourier de

    $$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

    Vea las distintas formas de esquivar los polos que hay y cuál es la correcta (dada por $i\epsilon$).

    (b) Halle una expresión analóga para el propagador del oscilador armonico del ejercicio anterior

3 Contracción de Wick y funciones de n-puntos

15. Considere una familia de operadores $A, B, C..$ que sean combinación lineal de operadores de creación y aniquilación del oscilador armonico. Definiendo $.\overbracket{A.B} \equiv\, < 0 \mid AB \mid 0 >$, muestre las siguientes relaciones:

    (a) $AB =: AB : +.\overbracket{A.B}$ (el segundo termino debe entenderse como un multiplo de la identidad)

    (b) $ABC =: ABC : +A.\overbracket{B.C} + B.\overbracket{A.C} + C.\overbracket{A.B}$

16. A partir de las relaciones anteriores, escriba $ABCD$ en termino de productos normalmente ordenados. Formule la ley general para un producto arbitrario de operadores.

17. Como colorario, muestre que $< 0 \mid A_1A_2....A_{2n+1} \mid 0 >$ es cero. Muestre entonces que la funcion de n-puntos $< 0 \mid \hat{\Phi}(x_1)...\hat{\Phi}(x_{2n+1}) \mid 0 >= 0$

18. **Orden temporal** Suponga ahora que los operadores anteriores estan indexados por un indice real t. Definiendo el orden temporal T como es usual, muestre que

    (a) $: T(A_{t_1}B_{t_2}...) : \;=\; : A_{t_1}B_{t_2}... :$. Sugerencia: antes de hacer una cuenta, piense lo que significa esta relación y concluya que es absolutamente trivial.

    (b) Usando lo anterior muestre que la descomposición de $T(ABC...YZ)$ en productos normalmente ordenados sige la misma regla pero pero utlizando ahora la contracción con orden temporal.