Teoría Cuántica de Campos

Guía 1: Ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac
Primer Cuatrimestre 2015

Parte A: Simetrías de las ecuaciones relativistas y propiedades de transformación del espinor de Dirac

1. (a) Considere una transformación de Lorentz Λ. Muestre que la matriz ω definida por $\Lambda = e^{\omega}$ satisface $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

   (b) Muestre que las relaciones que definen el álgebra de Lorentz:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{1}$$

   pueden re-escribirse como:

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ijl}J_l \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijl}J_l \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijl}K_l \tag{2}$$

   con $J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ y $K_i \equiv M_{i0}$.

2. (a) Aunque le parezca trivial, formule precisamente la condición de de invariancia relativista de la ecuación de Klein-Gordon.

   (b) Verifique la invariancia relativista a primer orden en ϵ para una transformacion de Poincare de la forma $e^{\epsilon A}$.

3. (a) Si Ψ es una solución de la ecuación de Dirac, encuentre la condición que se debe cumplir para que $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ (siendo S una matriz dependiente de Λ), sea solución. Formula la condición para la matriz S.

   (b) Compruebe que $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, con $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, satisface esa condición a primer orden en el párametro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ .

   (c) Verifique que las matrices Σ son generadores de una transformación de Lorentz actuando sobre espinores de Dirac, mostrando que satisface el algebra de Lorentz. (Ayuda: use la condición anterior sobre el conmutador $[\gamma_\mu, \Sigma_{\nu\rho}]$ y utilice la identidad de Jacobi)

4. Definiendo $\overrightarrow{A} = 1/2(\overrightarrow{J} + i\overrightarrow{K})$ y $B = 1/2(\overrightarrow{J} - i\overrightarrow{K})$ (siendo J y K los generadores de las rotaciones y boost respectivamente) muestre que el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$.

5. Formule la condición (y verifiquela) de que el spinor de Dirac pertenece a una representación de spin $1/2$.

6. Halle las relaciones que definen el álgebra de Poincare.

7. **Invariantes en el álgebra de Poincare**

   (a) Muestre que en un representación del álgebra de Poincare, la matriz/operador $P^2 = P^\mu P_\mu$ conmuta con todos los generadores del álgebra.

   (b) El *vector de Pauli-Lubansky* W^μ es definido por: $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ (siendo $M_{\mu\nu}$ generadores del algebra de Lorentz). Muestre que W^2 tambien conmuta con todos los otros generadores.

   (c) Muestre que en el sistema en reposo W^2 resulta ser proporcional al J^2. Halle la constante de proporcionalidad.

8. (a) Construya la representación $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$ del grupo de Lorentz y muestre que corresponde a una representación vectorial. Para ello, construya una matriz 2×2 con un espinor izquierdo y uno derecho. Escriba esta matriz como $A^0 1 + \vec{A}.\vec{\sigma}$ y muestre que $(A^0, \vec{A})$ transforma como un cuadrivector.

   (b) Análogamente, muestre que $(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ (la representación $(0, 0)$ es la escalar, mientras que la $(1, 0)$ corresponde a un tensor de dos índices antisimétrico

9. Encuentre las propiedades de transformación de las siguientes formas bilineales:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi,$$

10. (a) Construya las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac, usando la representación standard para las matrices de Dirac. Para ello, aplique un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt}$ $\Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo.
    (b) Halle la normalización de los espinores obtenidos.

Parte B: Presencia de soluciones de energía negativa

11. (a) Para entrar en calor, mostrar que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si φ satisface la ecuación de Klein-Gordon.
    (b) Evalúe la corriente para la soluciones de frecuencia positiva y negativa $\varphi_\pm(x,t) = e^{i\omega_\pm t + ik_j x^j}$, siendo $\omega_\pm = \pm\sqrt{k^2+m^2}$.
    (c) Muestre que la componente j_0 no es definida positiva (o negativa) para una solución que contenga mezcla de soluciones frecuencia positiva y negativa.

12. **Localizacion de paquetes de frecuencia definida.**
    Considere por simplicidad la ecuación de Klein Gordon en $1+1$ dimensiones: $(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\phi = 0$. Muestre que NO es posible tener una solución ϕ que sea combinación de frecuencias definida (positiva o negativa) y que sea diferente de cero unicamente en la region del espacio-tiempo causalmente conectada con $t = 0, -L/2 < x < L/2$. (Sugerencia: use que tanto $\varphi(x,0)$ como $\partial_t \phi(x,0)$ se anulan fuera de la region $-L/2 < x < L/2$, es decir, tienen soporte compacto y use luego el teorema de Schwartz-Paley-Wiener)

13. Estudie la evolución temporal del paquete Gaussiano

$$\Psi(\vec{r},0) = (\pi d^2)^{-3/4} e^{-\frac{r^2}{2d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    Muestre que para formar dicho paquete es necesario incluir soluciones de energía negativa con peso comparable a las de energía positiva sólo si $d \leq 1/m$. Interprete físicamente.

14. La operación de *conjugación de carga* se define como

$$\Psi_c = C\Psi^*$$

    donde la matriz C satisface $C^2 = 1,\ C^\dagger = C,\ C\gamma^{\mu *}C = -\gamma^\mu$
    (a) Muestre que si Ψ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético entonces Ψ_c satisface la misma ecuación cambiando el signo de la carga.
    (b) Pruebe que $C = i\gamma^2$ en la representación standard.

15. **Límite no-relativista**. Considere la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético ($p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$).
    (a) Muestre que en el límite no relativista $v \sim \frac{1}{2m}\vec{\sigma}.(\vec{p} - e\vec{A})u$ donde u y v son las componentes superior e inferior del espinor de Dirac.
    (b) Usando este resultado, pruebe que

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{m}\vec{\sigma}.\vec{B}\right] u = (E-m)u$$

    (en consequencia, el factor giromagnético del electrón es igual a 2).