Teoría Cuántica de Campos

Guía 3A: Cuantización canónica del campo de Dirac
Primer Cuatrimestre 2015

1. Considere el campo de Dirac $\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \sum_{r=1,2} \sqrt{\frac{m}{\omega(p)}} (u_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{-ipx} b_{r,\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}^{(r)} e^{ipx} d_{r,\mathbf{p}}^{\dagger}) d^3\mathbf{p}$, con b y d normalizados para satisfacer las reglas de anticonmutación $\{b_{r,\mathbf{p}}, b_{s,\mathbf{p'}}^{\dagger}\} = \{d_{r,\mathbf{p}}, d_{s,\mathbf{p'}}^{\dagger}\} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p'})\delta_{\mathbf{rs}}$ (u y v son los spinores usuales correspondientes a soluciones de frecuencia positiva y negativa respectivamente).

   Halle la expression del producto interno entre dos estados de 1-particula de la forma:

   (a) $d_{r,\mathbf{p}}^{\dagger} \mid 0\rangle$

   (b) $\int \frac{1}{\sqrt{\omega(p)}} h^r(\mathbf{p}) \mathbf{d}_{\mathbf{r},\mathbf{p}}^{\dagger} \mathbf{d^3p} \mid \mathbf{0}\rangle$ siendo h^r una función de R^3 (Aunque no deberia ser necesario aclararlo, no hay suma en r)

2. Expresar las siguientes operadores en terminos de operadores de creación y destrucción:

   (a) Carga

   (b) Energia

   (c) Momento

3. Halle la expresión de la energía pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que no es definida positiva.

4. Mostrar que:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = i(i\gamma^\mu \partial^\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta(x - y) \tag{1}$$

   siendo $\Delta(x - y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados. Halle también la expresión de $\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^{\dagger}(y)\}$.

5. Mostrar que el valor de expectación $\langle \xi \mid \psi_\alpha(x) \mid \xi\rangle$ es cero para cualquier estado $\mid \xi\rangle$ en el espacio de Fock.

6. Muestre la siguiente definición de orden temporal para el campo de Dirac:

$$T(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)) = \psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2) \quad si\ t_1 > t_2$$
$$T(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)) = \psi_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) \quad si\ t_2 > t_1$$

   siendo t_1 y t_2 la coordenada tiempo de los puntos del espacio tiempo x_1 y x_2. Esta difiere de la usual en un signo menos para el caso $t_2 > t_1$. Muestre que esta definición no es invariante de Lorentz y la standard si lo es.

7. Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x - y) \equiv \langle 0 \mid T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) \mid 0\rangle$

   (a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x - y) = i(\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x - y)$, siendo $\Delta_F(x - y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.

   (b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos de $\langle 0 \mid T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) \mid 0\rangle$

8. Usando el teorema de Wick, exprese la funcion de 4 puntos $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4) \mid 0\rangle$ en terminos de la de 2 puntos