Teoría Cuántica de Campos

Guía 4: Cuantización canónica del campo de Maxwell
Primer Cuatrimestre 2015

1. Considere una base de cuadrivectores de polarización $\epsilon(k, \lambda)$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) ortonormales, asociados a un vector k tipo luz ($k \neq 0$ y $k^2 = 0$). Exigiendo que, en un sistema de referencia dado, los primeros dos ($\lambda = 1, 2$) sean perpendiculares a la dirección de la parte espacial $\mathbf{k}$, el tercero sea paralelo a $\mathbf{k}$ y $\epsilon(k, 0) = (1, 0, 0, 0)$, muestre que:

   (a) que satisfagan la relación: $\epsilon_\mu(k, \lambda)\epsilon^\mu(k, \lambda') = g_{\lambda,\lambda'}$ (habiendo normalizado apropiadamente los 4 vectores).

   (b) Muestre que estos vectores de polarización satisfacen

   $$k.\epsilon(k, 1) = k.\epsilon(k, 1) = 0$$
   $$k.\epsilon(k, 3) = -k.\epsilon(k, 0)$$

   en cualquier sistema de referencia.

   (c) Muestre que $\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda) = g_{\mu\nu}$

2. **Spin del campo de Maxwell**. La expresión del momento angular S intrinseco asociado a un campo de Maxwell es: $S^l = \epsilon^{lij} \int \dot{A}^j A^i d^3x$.

   (a) Muestre que expresión del operador correspondiente, en términos de los operadores es $\hat{\mathbf{S}} = i \int \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}(a_2^\dagger(k)a_1(k) - a_1^\dagger(k)a_2(k)$

   (b) La helicidad se define como la proyección de S en la dirección de movimiento (es decir, la dirección del vector $\mathbf{k}$): $\Lambda \equiv \frac{\mathbf{S}.\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Halle la expresión del operador corresponiente.

   (c) Halle los autoestados del operador λ y verifique que los autovalores son $1, -1$, como debia ser

3. Considere el Lagrangiano de Maxwell con la adición del término de fijado de Gauge $-\frac{1}{2}\zeta(\partial_\mu A^\mu)^2$.

   (a) Para el caso $\zeta = 1$, usando las relaciones canonicas de conmutación, derive la expresión del propagador $-iT \langle 0 \mid A_\mu A_\nu \mid 0\rangle$ en terminos del propagador del campo de Klein-Gordon y escriba su expresión en el espacio de momentos.

   (b) Escriba (no la deduzca) la expresión del propagador para un valor arbitrario de ζ y verifique formalmente que es la función de Green asociada a la ecuación de movimiento correspondiente.

4. **Gupta-Bleuler**: verifique que la condición de Gupta-Bleuler $\langle \Psi \mid \partial_\mu A^\mu \mid \Psi\rangle$ se cumple para estados $\mid \Psi\rangle$ que contengan 1 modo longitudinal y 1 temporal.