Teoría Cuántica de Campos

Guía 2: Formulación Lagrangiana de teorías clasicas relativistas
Primer Cuatrimestre 2016

1. Considere la densidad Lagrangiana $L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$, con ϕ real.

   (a) Halle la expresión del tensor energía-momento

   (b) Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas.

   (c) Consier muestre que la primera es definida positiva para cualquier solución de la ecuaci

   (d) Halle la expresión de la energía para una solución generica de la solución de la ec de Klein-Gordon (superposicón de frecuencia positivas y negativas) en terminos de su transformada de Fourier y vea en que casos es definida positiva.

2. Considere el Lagrangiano $L = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo. Note que ahora no esta el factor $\frac{1}{2}$ en el término cinetico y el de masa.

   (a) escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuacion de Klein-Gordon.

   (b) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento en que el ejercicio anterior.

   (c) Halle la expresión del momento del campo y justifique la normalización del Lagrangiano.

   (d) Encuentre la corriente y carga de Noether asociada a la simetría $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ con α una constante real.

3. Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m. Halle la expresón de la energía y discuta su caracter definido positivo o negativo en el subespacio de soluciones con frecuencia positiva y negativa respectivamente.

4. Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Klein-Gordon y Dirac. En el último caso distinga la contribución de la parte orbital e intrinseca.

5. Considere el Lagrangiano:

$$L = i\psi \partial_t \psi^* - \frac{1}{2m}\nabla \psi . \nabla \psi - V \psi \psi^*$$

   para un campo ψ con V una función del espacio.

   (a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ψ y muestre que es la ecuación de Schrodinger, siendo V el potencial.

   (b) Encuentre la carga conservada asociada a la invariancia ante traslaciones temporales. Interprete el resultado como el valor medio de un operador.

6. Considere el Lagrangiano:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

   (a) Muestre que para $m \neq 0$ no es una simetría la transformación $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ con Λ función arbitraria del espacio tiempo.

   (b) Muestre que para $m \neq 0$ las ecuaciones de movimiento implican la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$.

7. Considere el Lagrangiano de un campo escalar complejo acoplado al electromagnetismo. La invariancia del lagrangiano frente a transformaciones de simetría globales implica la conservación de la carga. Existen nuevas corrientes conservadas a las simetrías *locales*? Halle la expresión de la corriente de Noether asociada a esta simetría y muestre que esta da lugar a una ley de conservación *trivial*.

8. En la naturaleza existen tres tipos de piones que se pueden describir con campos escalares $\phi_a, a = 1, 2, 3$ que interaccionan con una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{1}{2}m^2\phi_a^2 - \lambda(\phi_a^2)^2$$

   (a) Verifique que este Lagrangiano es invariante ante transformaciones internas de los campos (llamadas de isospin)

$$\phi_a \to \phi'_a = A_{ab}\phi_b$$

   donde A es una matriz ortogonal (rotaciones internas). Calcule las corrientes de Noether $j^a_\mu(x)$ y las cargas $Q^a = \int d^3x j^a_0(x,t)$.

9. Considere el lagrangiano de Dirac y las siguientes transformaciones de los espinores:

$$\Psi \to e^{i\alpha}\Psi \qquad \Psi \to e^{i\beta\gamma_5}\Psi$$

   (a) Construya las corrientes de Noether asociadas a estas transformaciones. ¿En qué casos se conservan?

   (b) Escriba las transformaciones y las corrientes en términos de los espinores ϕ_R y ϕ_L

   (c) Analice la conservación de las corrientes para fermiones no masivos acoplados al electromagnetismo.