Teoría Cuántica de Campos

Guía 3: Cuantización canónica del campo de Klein-Gordon
Primer Cuatrimestre 2016

1 Prelimimares: espacio de Hilbert de 1-partícula, espacio de Fock

1. Considere dos funciones f_1 y f_2 de las componentes espaciales k^i del cuadrivector $(\omega(k), k)$ (con $\omega(k) \equiv \sqrt{m^2 + k^2}$ $(m \neq 0)$).

   (a) Verifique que el producto interno definido por $(f_1, f_2) \equiv \int f_1^*(k) f_2(k) \frac{d^3k}{\omega(k)}$ es invariante de Lorentz.

   (b) Este producto interno puede definirse para funciones de R^d con d arbitrario. Verifique la invariancia anterior en el caso $d = 2$ calculando el Jacobiano que aparece al hacer un boost.

2. **Espacio de Hilbert de estados de "1-particula"**: Considere el estado $a_k^\dagger 0|\rangle$ siendo $|0\rangle$ el vacio y $a_k^\dagger$ el operador de creación del campo escalar neutro de Klein-Gordon.

   (a) Verifique que $a_k^\dagger 0|\rangle$ es autoestado de los operadores momentos del campo, con autovalor k_i.

   (b) Halle la expresión formal del producto interno entre $a^\dagger{}_k|0\rangle$ y $a^\dagger{}_{k'}|0\rangle$.

   (c) Considere ahora dos funciones de R^3 f_1 y f_2. Halle el producto producto interno entre los estados: $\int f_1(k) a_k^\dagger \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} |0>$ y $\int f_2(k) a_k^\dagger \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} |0>$ y exprese el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2. Compare este producto interno con el del ejercicio 1.

3. Muestre que para todo estado $\mid \xi_n\rangle$ correspondiente a n-particulas, el valor de expectación de $\langle \xi_n \mid \hat{\Phi}(x) \mid \xi_n\rangle$ es igual a cero. Como construiría entonces un estado $|\xi\rangle$ tal que el valor de expectación de $\langle \xi \mid \hat{\Phi}(x) \mid \xi\rangle$ sea igual a una función del espacio-tiempo no-nula de modo que tenga chances de describir un estado semiclasico? (ayuda: recuerde la construcción de estado análogos en el caso del oscilador armonico unidimensional)

4. Usando la definición del operador de carga Q para un campo de Klein-Gordon complejo, muestre que los estados $| p^+ > \equiv a_p^\dagger \mid 0 >$ y $| p^- > \equiv b_p^\dagger \mid 0 >$ tienen autovalor de Q de signos opuestos.

5. Las transformaciones de Poincare forman un grupo de simetías de la teoría cuántica y por tanto cada transformación tiene un operador unitario asociado.

   (a) Escriba la expresión de los operadores $U(1, a)$ asociados a una traslación espacio-tiempo de parametro a^μ.

   (b) Como construiría los operadores unitarios asociados a boost y rotaciones?

   (c) Los operadores de campo $\hat{\phi}$ transforman ante Poincare en la forma $\hat{\phi}(x) \to U(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda, a)$. Verifique que $U(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda, a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$ para el caso de una traslación pura y a primer orden en el parámetro a.

2 Función de 2 puntos, conmutador, propagador

6. Considere el campo a tiempo cero suavizado por una función espacial $\hat{\Phi}_0(h) \equiv \int \hat{\Phi}(x, 0)h(x)d^3x$.

   (a) Halle la expresion de $\hat{\Phi}_0(h)$ como integral en los momentos de la transformada de Fourier espacial $\hat{h}$.

   (b) Usando las reglas de conmutación de los operadores de creacion y aniquilación, calcule el producto interno entre un estado $\hat{\Phi}_0(h_1)|0>$ y $\hat{\Phi}_0(h_2)|0>$ y compare con el producto interno definido en el ejercicio 1.

   (c) Calcule la expresión formal de $< 0 \mid \hat{\Phi}(x, 0)\hat{\Phi}(y, 0) \mid 0 >$.

7. Halle la expresión de la *función de dos puntos* $< 0 \mid \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y) \mid 0 >$ donde ahora x e y son puntos del espacio tiempo arbitrarios como integral en los momentos

8. **Invariancia de Poincare de la función de 2-puntos**. Verifique la invariancia de Poincare e la función de dos puntos

    (a) Observando la expresión del item anterior

    (b) Usando la forma en que transforman los operadores de campo del item 5.

9. Halle ahora la expresión del conmutador $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)]$ como una integral en los momentos.

10. **Condición de microcausalidad** Muestre que el conmutador anterior es cero para x e y espacialemente separados, es decir para $(x-y)^2 < 0$.

11. **Idea de demostración del teorema spin-estadistica**. Suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anti-conmutación. Muestre que el anticonmutador es diferente de cero para puntos espacialemente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba esta como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas).

12. Calcule los conmutadores $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(y)]$ y $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)]$ para un campo campo de Klein-Gordon complejo. Halle tambien la función de 2 puntos $< 0 \mid \hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}^\dagger(y) \mid 0 >$

13. **Propagador del oscilador armonico cuántico** Considere la cuantización canónica de un oscilador armonico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

    (a) Calcule la función de dos variables $< 0|\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)|0 >$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0 >$ el estado de vacio.

    (b) Muestre que la función $i < 0|T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2))|0 >$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del parentesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

14. (a) Calcule

    $$\langle 0|T(\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y))|0\rangle$$

    escribiendo $\hat{\Phi}$ en términos de a_k y $a_k^\dagger$. Demuestre que es igual a la transformada de Fourier de

    $$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

    Vea las distintas formas de esquivar los polos que hay y cuál es la correcta (dada por $i\epsilon$).

    (b) Halle una expresión analóga para el propagador del oscilador armonico del ejercicio anterior