Teoría Cuántica de Campos

Guía 1: Ecuación de Klein-Gordon y Dirac
Primer Cuatrimestre 2016

Parte A: Simetrías de las ecuaciones relativistas y propiedades de transformación del espinor de Dirac

1. (a) Considere una transformación de Lorentz dada por una matriz Λ: $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu}$. Muestre que la matriz λ definida por $\Lambda = e^{\lambda}$ satisface $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$, siendo $\lambda_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\rho}\lambda^{\rho}_{\nu}$

   (b) Muestre que las relaciones entre los generadores $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ que definen el álgebra de Lorentz:

   $$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

   pueden re-escribirse como:

   $$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ijl}J_l \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijl}J_l \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijl}K_l$$

   con $J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ y $K_i \equiv M_{i0}$.

2. Halle las relaciones que definen el álgebra de Poincare evaluando la diferencia en un cuadrivector al realizar las transformaciones sucesivas (Λ_1, a_1) y (Λ_2, a_2) permutando el orden entre ellas. Aqui la notación (Λ, a) indica la transformación $x^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}$. Si no le sale, al menos escriba esas relaciones.

3. (a) Formule y verifique la condición de invariancia relativista de la ecuación de Klein-Gordon.

   (b) Si Ψ es una solución de la ecuación de Dirac, encuentre la condición que debe cumplir la matriz S para que $\tilde{\Psi}$, definida por $\tilde{\Psi}(x) \equiv S(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ sea solución.

4. Compruebe que $S \equiv e^{\frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, con $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, satisface la condición previa a primer orden en el párametro $\omega^{\mu\nu}$ de la transformación de Lorentz Λ .

5. Verifique que las matrices Σ satisfacen el algebra de Lorentz. (Ayuda: use la condición anterior sobre el conmutador $[\gamma_\mu, \Sigma_{\nu\rho}]$ y utilice la identidad de Jacobi)

6. Construya la representación $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$ del grupo de Lorentz y muestre que corresponde a una representación vectorial. Para ello, construya una matriz 2×2 con un espinor izquierdo y uno derecho. Escriba esta matriz como $A^0 1 + \vec{A}.\vec{\sigma}$ y muestre que $(A^0, \vec{A})$ transforma como un cuadrivector.

7. Definiendo $\overrightarrow{A} = 1/2(\overrightarrow{J} + i\overrightarrow{K})$ y $\overrightarrow{B} = 1/2(\overrightarrow{J} - i\overrightarrow{K})$ (siendo J y K los generadores de las rotaciones y boost respectivamente) muestre que el álgebra de Lorentz es suma directa de dos $su(2)$.

8. Encuentre las propiedades de transformación de las siguientes formas bilineales:

   $$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}\Psi,$$

9. (a) Muestre que en una representación del álgebra de Poincare, la matriz/operador $P^2 = P^{\mu}P_{\mu}$ conmuta con todos los generadores del álgebra.

   (b) El *vector de Pauli-Lubansky* W^{μ} es definido por: $W^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_{\nu}M_{\rho\sigma}$ (siendo $M_{\mu\nu}$ generadores del algebra de Lorentz). Muestre que W^2 tambien conmuta con todos los otros generadores.

   (c) Muestre que en el sistema en reposo W^2 resulta ser proporcional al J^2. Halle la constante de proporcionalidad.

10. (a) Construya las soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac, usando la representación standard para las matrices de Dirac. Para ello, aplique un boost sobre los espinores $\Psi(x) = u(0)e^{-imt} \quad \Psi(x) = v(0)e^{imt}$ correspondientes a una partícula en reposo.

    (b) Halle la normalización de los espinores obtenidos.

11. Alternativamente, muestre que $e^{-ikx}u(\mathbf{k})$ con $u(\mathbf{k}) \equiv c(\mathbf{k})(\not{k} + m)u(0)$ (c una constante dependiente del momento) es solución de la ecuación de Dirac. Muestre también que $e^{+ikx}v(\mathbf{k})$ con $v(\mathbf{k}) \equiv d(\mathbf{k})(\not{k} - m)v(0)$ es solución (d una constante dependiente del momento). Relacione ambas con los espinores obtenidos en el inciso anterior.

12. Determine las constantes c y d del inciso anterior por la condición de normalización $\bar{u}^{(\alpha)}u^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$ y $\bar{v}^{(\alpha)}v^{(\beta)} = -\delta_{\alpha\beta}$

Parte B: Presencia de soluciones de energía negativa

13. (a) Para entrar en calor, mostrar que la corriente $j_\mu \equiv -\frac{i}{2}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*)$ satisface la ecuación de continuidad $\partial_u j^u = 0$ si φ satisface la ecuación de Klein-Gordon.
    (b) Evalúe la corriente para la soluciones de frecuencia positiva y negativa $\varphi_\pm(x,t) = e^{\mp ikx}$, siendo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.
    (c) Muestre que la componente j_0 no es definida positiva (o negativa) en el espacio de soluciones generado por soluciones frecuencia positiva y negativa.

14. **Proyectores de energia positiva y negativa**

    (a) Muestre que los espinores u y v satisfacen las relaciones:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{2m} \qquad -\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}$$

    (b) A partir de esta expresión muestre que $\sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)$ y $-\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)$ son proyectores en el subespacio de energias positivas y negativas respectivamente.

15. Estudie la evolución temporal del paquete Gaussiano

$$\Psi(\vec{r},0) = (\pi d^2)^{-3/4} e^{-\frac{r^2}{2d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Muestre que para formar dicho paquete es necesario incluir soluciones de energía negativa con peso comparable a las de energía positiva sólo si $d \leq 1/m$. Interprete físicamente.

16. La operación de *conjugación de carga* se define como

$$\Psi_c = C\Psi^*$$

donde la matriz C satisface $C^2 = 1,\ C^\dagger = C,\ C\gamma^{\mu *}C = -\gamma^\mu$

    (a) Muestre que si Ψ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético entonces Ψ_c satisface la misma ecuación cambiando el signo de la carga.
    (b) Pruebe que $C = i\gamma^2$ en la representación standard.

17. **Límite no-relativista**. Considere la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético ($p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$).

    (a) Muestre que en el límite no relativista $v \sim \frac{1}{2m}\vec{\sigma}.(\vec{p} - e\vec{A})u$ donde u y v son las componentes superior e inferior del espinor de Dirac.
    (b) Usando este resultado, pruebe que

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eA^0 - \frac{e}{m}\vec{\sigma}.\vec{B}\right] u = (E - m)u$$

    (en consecuencia, el factor giromagnético del electrón es igual a 2).