Teoría Cuántica de Campos

Primer Cuatrimestre 2016

Guía 4: Cuantizaciń canónica del campo de Dirac y Maxwell

1. Considere el campo de Dirac $\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \sum_{r=1,2} (e^{-ikx} u_{\mathbf{p}}^{(r)} b_{r,\mathbf{p}} + e^{ikx} v_{\mathbf{p}}^{(r)} d_{r,\mathbf{p}}^{\dagger}) \sqrt{\frac{m}{\omega(p)}} d^3\mathbf{p}$, con b y d normalizados para satisfacer las reglas de anticonmutación $\{b_{r,\mathbf{p}}, b_{s,\mathbf{p}'}^{\dagger}\} = \{d_{r,\mathbf{p}}, d_{s,\mathbf{p}'}^{\dagger}\} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}$ (u y v son los spinores usuales correspondientes a soluciones de frecuencia positiva y negativa respectivamente, k el cuadrimomento de una particula de masa m con momento espacial $\mathbf{p}$). Halle la expresión del momento conjugado y verifique las relaciones de Heisenberg entre el campo y su momento a tiempos iguales.

2. Exprese los siguientes operadores en términos de operadores de creación y destrucción:

   (a) Carga (cantidad conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$)

   (b) Energia

   (c) Momento

3. Halle la expresión de la energía pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que no es definida positiva.

4. Mostrar que:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = i(i\gamma^\mu \partial^\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta(x - y)$$

   siendo $\Delta(x - y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados. Halle también la expresión de $\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}$.

5. Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x - y) \equiv \langle 0 \mid T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) \mid 0\rangle$

   (a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x - y) = i(\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x - y)$, siendo $\Delta_F(x - y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.

   (b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos de $\langle 0 \mid T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) \mid 0\rangle$

6. Usando el teorema de Wick, exprese la función de 4 puntos $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4) \mid 0\rangle$ en terminos de la de 2 puntos

7. Considere una base de cuadrivectores de polarización $\epsilon(k, \lambda)$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) ortonormales, asociados a un vector k tipo luz ($k \neq 0$ y $k^2 = 0$). Exigiendo que, en un sistema de referencia dado, los primeros dos ($\lambda = 1, 2$) sean perpendiculares a la dirección de la parte espacial $\mathbf{k}$, el tercero sea paralelo a $\mathbf{k}$ y $\epsilon(k, 0) = (1, 0, 0, 0)$, muestre que:

   (a) que satisfagan la relación: $\epsilon_\mu(k, \lambda)\epsilon^\mu(k, \lambda') = g_{\lambda,\lambda'}$ (habiendo normalizado apropiadamente los 4 vectores).

   (b) Muestre que estos vectores de polarización satisfacen

$$\begin{aligned} k.\epsilon(k, 1) = k.\epsilon(k, 1) = 0 \\ k.\epsilon(k, 3) = -k.\epsilon(k, 0) \end{aligned}$$

   en cualquier sistema de referencia.

   (c) Muestre que $\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda) = g_{\mu\nu}$

8. **Spin del campo de Maxwell**. La expresión del momento angular S intrinseco asociado a un campo de Maxwell, en el gauge de Coulomb, es: $S^l = \epsilon^{lij} \int \dot{A}^j A^i d^3x$.

   (a) Muestre que expresión del operador correspondiente, en términos de los operadores es $\hat{\mathbf{S}} = i \int \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}(a_2^\dagger(k)a_1(k) - a_1^\dagger(k)a_2(k)$

(b) La helicidad se define como la proyección de S en la dirección de movimiento (es decir, la dirección del vector $\mathbf{k}$): $\Lambda \equiv \frac{\mathbf{S}.\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Halle la expresión del operador corresponiente.

(c) Halle los autoestados del operador λ y verifique que los autovalores son $1, -1$, como debia ser

9. Considere el Lagrangiano de Maxwell con la adición del término de fijado de Gauge $-\frac{1}{2}\zeta(\partial_\mu A^\mu)^2$.

   (a) Para el caso $\zeta = 1$, usando las relaciones canonicas de conmutación, derive la expresión del propagador $-iT\ \langle 0 \mid A_\mu A_\nu \mid 0\rangle$ en terminos del propagador del campo de Klein-Gordon y escriba su expresión en el espacio de momentos.

   (b) Escriba (no la deduzca) la expresión del propagador para un valor arbitrario de ζ y verifique formalmente que es la función de Green asociada a la ecuación de movimiento correspondiente.

10. **Gupta-Bleuler**: verifique que la condición de Gupta-Bleuler $\langle \Psi \mid \partial_\mu A^\mu \mid \Psi\rangle$ se cumple para estados $\mid \Psi\rangle$ que contengan 1 modo longitudinal y 1 temporal.