Teoría Cuántica de Campos

Guía 6: Diagramas de orden superior, regularización y renormalización
Primer Cuatrimestre 2016

Grados de divergencias y criterios de renormalizabilidad

1. Considere el Lagrangiano de un campo de Klein Gordon neutro en un espacio tiempo de d dimensiones con un término de interacción $\lambda\phi^4$ y el diagrama de Feynman con n vertices, L lineas internas, E lineas externas y L loops.
   (a) Muestre que el grado de divergencias D es igual a $dL - 2I$.
   (b) Muestre que valen las siguientes relaciones: $L - I + n = 1$ y $4n = E + 2I$
   (c) Usando las relaciones precedentes, halle la expresión del grado de divergencia en términos de las lineas externas E y el número de vertices n. Analice la renormalizabilidad y superenormalizabilidad de esta teoría para distintos valores de d, incluyendo $d = 4$

2. Repita el análisis anterior para QED en $d = 4$

3. Considere un campo de Klein-Gordon en d dimensiones con una interacción del tipo $g\phi^r$ (r entero positivo ≥ 4), siendo g la constante de acoplamiento.
   (a) Halle las dimensiones de masa δ de la constante g.
   (b) Halle la expresión de el grado superficial de divergencia en términos de δ, el número de vertices y el numero de patas externas.
   (c) Analice la renormalizabilidad de cada modelo de acuerdo al signo de δ

4. Dibuje diagramas divergentes irreducibles de:
   (a) QED
   (b) $\lambda\phi^4$

5. Suponga que un diagrama de Feynman tiene grado de divergencia D negativo. Significa eso que es convergente? Para responder a esta pregunta considere ejemplos de diagramas a uno y dos loops el caso de QED.

Regularización de integrales divergentes

6. Muestre las siguientes identidades de integrales en d dimensiones para los valores de d en que estan bien definidas (el producto entre vectores que aparece en los integrandos es con la metrica de Minkowski):
   (a) $\int d^dk \frac{1}{(k^2+2p.k-m^2)^2} = \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}}\Gamma(n - \frac{D}{2})$
   (b)
   (c) $\int d^dk \frac{k^\mu}{(k^2+2p.k-m^2)^2} = \frac{-i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}} p^\mu \Gamma(n - \frac{D}{2})$

7. Considere la contribución en el canal s a la función de 4 puntos de la teoría del ejercicio 1, a orden λ^2.
   (a) Muestre que, a menos de factores, esta contribución esta dada por la integral divergente $\int^4 d^4p \frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}$, siendo q la suma de los momentos iniciales.
   (b) Mediante la siguiente identidad $\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{z}{(az+b(1-z))^2}$ escriba la generalización de la integral precedente a d dimensiones en la forma $\int_0^1 dz \int d^dp \frac{1}{(p^2-m^2+q^2z(1-z))^2}$
   (c) Usando la expansión $\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + o(\epsilon))$, con n natural y $\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + ...\frac{1}{n} - \gamma$ (siendo γ la constante de Euler-Mascheroni) halle la expresión de la integral anterior en el limite $d \to 4$

8. Mediante el metodo de regularización dimensional, halle la expresión regularizada de los siguientes diagramas (a un loop):

   (a) Autonergía del electrón.

   (b) Auto energía del fotón (o polarización del vacio)

   (c) Grafo del vertice.

Renormalización

9. Usando las amplitudes a 1-loop regularizadas, formule los pasos que hay que seguir para obtener la expresión de la constantes de acoplamiento en función de los momentos externos tanto en QED como en $\lambda\phi^4$. Usando las expresiones que encuentre en la bibliograía, muestre que en ambos casos hay un *polo de Landau*.

10. Grafique la solución a la ecuación diferencial para la constante de acoplemiento g, función de la escala μ: $\mu\frac{dg}{d\mu} = \beta g^2$, con β constante, para los casos $\beta = 0$, $\beta > 0$ y $\beta < 0$