

Teoría Cuántica de Campos (2020)

1

- Materia optativa Lic. y de Doc. (5 puntos)
- Fechas Importantes - guías de problemas -
noticias y bibliografía - pág. de la materia

"materias.df.uba.ar/tc2020c1"

"Objetivo"

Desarrollar el método de cálculo
básico de la teoría cuántica de
campos (QFT): el formalismo
de Diagramas de Feynman.

→ Aplicaremos el formalismo a la
electrodinámica cuántica (QED), la teoría
cuántica de electrones (e^-) y fotones (γ)

→ QED: teoría física fundamental

(Ecs. de Maxwell + Ecs. de Dirac) Invariencia Relativista.

Introducción

2

Teorías de Campos: Gravitación (RG)
Partículas elementales

Visión clásica: Electrodinámica, Gravitación

Visión cuántica: 1901 (Planck): cuantos del campo EM
Fotón: $E = h\nu$

1920's (y después): mecánica cuántica
del e^- (No-Rel.)

1950's $\rightarrow$ Electrodinámica
cuántica (QED)
(momento mínimo
del e^- mov.)

Interacciones
fundamentales

$\left\{ \begin{array}{l} \text{EM} \\ \text{Nuclear fuerte} \\ \text{Nuclear débil} \\ \text{Gravitatorio} \end{array} \right.$

$\rightarrow$ Mantiene unidos
a los nucleones
(Prot. y neut.)

$\rightarrow$ desintegración β y
radioactividad

débil $\equiv 10^{-13}$ fuerte

¿Por qué no es fácil escribir una ecuación (3) de Schrodinger relativista? $\rightarrow$ primera cuestión

- La ec. de Schrodinger está basada en argumentos no relativistas $\rightarrow$ $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$
 $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

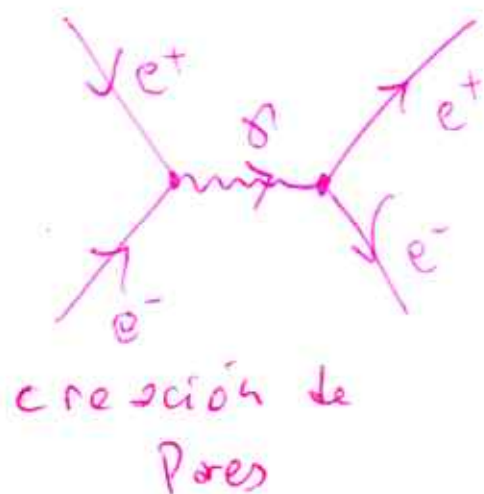
$\psi(\vec{x}, t)$
 función de onda

Asociada a la probabilidad de encontrar a la partícula en $\vec{x}$ a tiempo t .

Se puede hacer de manera "covariante"

$\Downarrow$
 Ecuación de Klein-Gordon

$\nwarrow$
 Problemas de interpretación
 Para el e^-



La creación de pares es un efecto relativista que no puede ser descrito en función de una teoría de una sola partícula.

• Caso no relativista: $p_x \ll mc$

• Caso relativista: $p_x \sim mc \rightarrow$ existe probabilidad de creación de pares

Del principio de Incertidumbre

de Heisenberg: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$

no Rel

$\Rightarrow$ en el régimen no relativista (sin posibilidad de creación de

$$\Delta p_x \ll mc \Rightarrow \Delta x > \frac{\hbar}{mc} \sim \lambda_{\text{compton}} \quad (\text{pares})$$

energía
mínimo umbral para la
creación de pares

$$\sim 10^{-11} \text{ em}$$

en el sistema en reposo
del e^- , el error mínimo
de una medición de su
posición

Si queremos
localizar "mucho"
a una partícula,
nos encontramos con
la creación de pares

Si queremos localizar una partícula

en una distancia $< \lambda_{\text{compton}} \Rightarrow$ necesario incluir
efectos relativistas
en la mecánica cuántica

- Vamos a cuantizar el campo A_μ ($\vec{E}$ y $\vec{B}$)

5

$\vec{E}, \vec{B}$ Reglas $|0\rangle$ vacío
de cuantización:
 $|n_{k,\lambda}\rangle$ fotones

- Campo libre (sin interacciones) $\rightarrow$ conjunto de osciladores armónicos

- Para describir al e^- hay un campo ψ (de Dirac) asociado al e^- y los estados de ese campo

Modos normales
describen partículas

se interpretan como partículas (e^-) con masa (m) spin ($s=1/2$) y carga $q = -e$.

- Además, aparece la necesidad de describir al e^+ con masa (m), $s=1/2$ y $q = e$ (antipartículas)

- Con el mismo formalismo, describiremos partículas de spin entero (por ej. piones $s=0$), o fotones.

campo de Dirac

$$\psi$$

$$e^-, e^+$$

campo escalar

$$\phi$$

$$\pi$$

campo EM

$$A_\mu$$

$$\gamma$$

campos con
propiedades
bien definidas
baste a transform.
de Lorentz (gauge)

Partículas Elementales

Hadrones (sienta la
Interacción
fuerte y débil)

bariones S
($m, p, n, \dots$) semi-
entero

mesones S
(π, K, ρ) entero

Leptones (solo tienen
Int. débil) : $e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau$

Modelo Estándar

$$SU(2) \times U(1) \times SU(3)_{\text{color}} \quad (3 \text{ flaves})$$

Leptones $\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

$S = 1/2$
Fermiones

Quarks $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$

$S = 1/2$

Botón de gauge : $\gamma, W^\pm, Z^0, 8 \text{ gluons} + \text{Higgs} : m_H \sim 125 \text{ GeV}$

Quantización del campo EM [7]

Libre

$$(\hbar \equiv c \equiv 1)$$

Ecs de Maxwell
(Campo clásico)
(Sin fuentes)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Invar. de gauge

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \\ \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{gauge de Lorentz}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Leftrightarrow A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0$$

Ec. de ondas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \phi = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = -\nabla^2 \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = 0$$

eliminamos componente de A_μ

la cuantización no debe depender del gauge

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

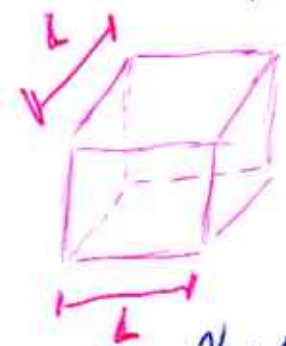
$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \Rightarrow A_0 = \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

eliminamos componente A_0 del A_μ

Sólo nos importa el $\vec{A} \left/ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A_i = 0 \right. \text{ ó } \boxed{\square A_i = 0}$

Descomposición en modos de Fourier:

8



Vol. V (cubo)

Vol. finito con condiciones de contorno periódicas $\psi(0) = \psi(L)$

$\psi = 1$
 $\psi = 1 = e^{ik_x L}$
 $\Downarrow$

$$k_x L = 2n_x \pi \Rightarrow k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \rightarrow \text{genl } k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$$

Para la interpretación de la solución de la ec. de ondas conviene tener valores discretos del k_i

$$\vec{A} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{A}_{\vec{n}}(t) e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}} + c.c.$$

base en Cartesiana $\psi(\vec{x})$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{n}} \vec{A}_{\vec{n}}(t) e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}} + c.c.$$

Imponemos que $\square A_i = 0$

$$0 = \square \vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \sum_{\vec{n}} \ddot{\vec{A}}_{\vec{n}} e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}} + |\vec{h}|^2 \vec{A}_{\vec{n}} e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}} + c.c.$$

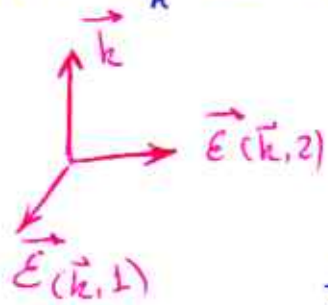
($c=1$)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{A}}_{\vec{n}} + |\vec{h}|^2 \vec{A}_{\vec{n}} = 0}$$

Además hay que imponer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{\vec{n}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_{\vec{n}}(t) e^{i\vec{h} \cdot \vec{x}}) + c.c. \Rightarrow \boxed{\vec{h} \cdot \vec{A}_{\vec{n}} = 0}$$

$\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0 \leadsto$ Defino una base de vectores 9
que contenga a $\vec{k}$



entonces transversal $(\vec{E}(\vec{k}, 1), \vec{E}(\vec{k}, 2), \vec{k})$

$\vec{A}$: combinación lineal de $\vec{E}$

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\lambda=1,2} \underbrace{\frac{c_{\vec{k},\lambda}(t)}{\sqrt{V}}}_{\text{normalización}} \underbrace{\vec{E}(\vec{k}, \lambda)}_{\text{vector de polarización}}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} c_{\vec{k}, \lambda}(t) \vec{E}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + c.c.$$

$$\vec{\ddot{c}}_{\vec{k}, \lambda} + |\vec{k}|^2 c_{\vec{k}, \lambda} = 0$$

$\Downarrow$

$$c_{\vec{k}, \lambda}(t) = c_{\vec{k}, \lambda}(0) \times e^{-i\omega_{\vec{k}} t}$$

$$\text{donde } \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$$

Límite continuo: $\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$

Entonces: $\vec{A}(\vec{x}, t)$ queda definido
donde los $\{c_{\vec{k}, \lambda}\}$: sistemas de ∞ grados de lib. discretos

Formulación Hamiltoniana

10

$$H = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left[\left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 + |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 \right]$$

Recordar $\leftarrow$ Densidad de energía EM $\equiv \mathcal{U}$
FT 1

• Veo primero el término $\int d^3x |\vec{E}|^2$:

$$\int d^3x |\vec{E}|^2 = \int d^3x |\dot{\vec{A}}|^2 = \frac{1}{V} \int d^3x \sum_{\vec{n}} (-i\omega) \left(\vec{C}_{\vec{n}} e^{i\vec{n} \cdot \vec{x}} - \vec{C}_{\vec{n}}^* e^{-i\vec{n} \cdot \vec{x}} \right)$$

estoy usando $\rightarrow$

$$\vec{C}_{\vec{n}} \equiv c_{\vec{n},\lambda} \vec{E}(\vec{n},\lambda)$$

$$\times \sum_{\vec{n}'} (-i\omega') \left(\vec{C}_{\vec{n}'} e^{i\vec{n}' \cdot \vec{x}} - \vec{C}_{\vec{n}'}^* e^{-i\vec{n}' \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\text{usando que: } \int d^3x e^{i(\vec{n}-\vec{n}') \cdot \vec{x}} = V \cdot \delta(\vec{n}-\vec{n}') \quad \left(k_i = m i \frac{2\pi}{L} \right)$$

$$\Rightarrow \int d^3x |\vec{E}|^2 = \sum_{\vec{n}} \omega^2 \left[\vec{C}_{\vec{n}} \cdot \vec{C}_{\vec{n}}^* + \vec{C}_{\vec{n}}^* \vec{C}_{\vec{n}} - \vec{C}_{-\vec{n}} \vec{C}_{-\vec{n}} - \vec{C}_{-\vec{n}}^* \vec{C}_{-\vec{n}}^* \right]$$

• Veo el segundo término: $\int d^3x |\vec{B}|^2 = \int d^3x |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2$

$$= \int d^3x \sum_{\vec{n}} i\vec{n} \times \left(\vec{C}_{\vec{n}} e^{i\vec{n} \cdot \vec{x}} - \vec{C}_{\vec{n}}^* e^{-i\vec{n} \cdot \vec{x}} \right) \times \sum_{\vec{n}'} i\vec{n}' \times \left(\vec{C}_{\vec{n}'} e^{i\vec{n}' \cdot \vec{x}} - \vec{C}_{\vec{n}'}^* e^{-i\vec{n}' \cdot \vec{x}} \right)$$

usando "transversalidad": $\vec{n} \cdot \vec{C}_{\vec{n}} = 0$

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{A}_n = 0 \right) \Downarrow 0 = \sum_{\vec{n}} |\vec{n}|^2 \left(\vec{C}_{\vec{n}} \cdot \vec{C}_{\vec{n}}^* + \vec{C}_{\vec{n}}^* \cdot \vec{C}_{\vec{n}} + \vec{C}_{-\vec{n}} \cdot \vec{C}_{-\vec{n}} + \vec{C}_{-\vec{n}}^* \cdot \vec{C}_{-\vec{n}}^* \right)$$

Finalmente: $H = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ (11)

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{\vec{u}} \omega^2 (\vec{C}_{\vec{u}} \cdot \vec{C}_{\vec{u}}^* + \vec{C}_{\vec{u}}^* \cdot \vec{C}_{\vec{u}})$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{u}} \omega^2 \vec{C}_{\vec{u}} \cdot \vec{C}_{\vec{u}}^*$$

Ahora definimos $q_{\vec{u},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (C_{\vec{u},\lambda} + C_{\vec{u},\lambda}^*)$: real

$$p_{\vec{u},\lambda} = \dot{q}_{\vec{u},\lambda} = -\frac{i\omega_{\vec{u}}}{\sqrt{4\pi}} (C_{\vec{u},\lambda} - C_{\vec{u},\lambda}^*)$$
 : real

$$\Rightarrow C_{\vec{u},\lambda} = \sqrt{\pi} \left(q_{\vec{u},\lambda} + \frac{i}{\omega_{\vec{u}}} p_{\vec{u},\lambda} \right)$$

y por lo tanto:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{u},\lambda} \left(p_{\vec{u},\lambda}^2 + \omega_{\vec{u}}^2 q_{\vec{u},\lambda}^2 \right)$$

Ecs. de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q = \ddot{q}$$

encontramos un
oscilador armónico

por cada valor de
 $\vec{u}$ y por cada valor de λ

↓
¡ FÁCIL DE CUANTIZAR!

p, q operadores $\longleftrightarrow A, E, B$ operadores $\longleftrightarrow c_{\vec{u}, \lambda}$

$[q, q] = 0 = [p, p]$; $[p_{\vec{u}, \lambda}, q_{\vec{u}', \lambda'}] = -i \delta_{\vec{u}\vec{u}'} \delta_{\lambda\lambda'}$ operadores.
 $\hookrightarrow \hbar = 1$

$p q - q p = -i \Rightarrow p_{\vec{u}, \lambda} q_{\vec{u}', \lambda'} - q_{\vec{u}', \lambda'} p_{\vec{u}, \lambda} = -\frac{i\omega}{4\pi} 2 (c c^* - c^* c)$
 $= -i$

olvidar sub-
índices

$c c^{\dagger} - c^{\dagger} c = \frac{2\pi}{\omega_{\vec{u}}}$

$\Rightarrow [c_{\vec{u}, \lambda}, c_{\vec{u}', \lambda'}^{\dagger}] = \frac{2\pi}{\omega_{\vec{u}}} \delta_{\vec{u}\vec{u}'} \delta_{\lambda\lambda'}$
 $[c, c] = [c^{\dagger}, c^{\dagger}] = 0$

analogía con $a, a^{\dagger} \therefore [a, a^{\dagger}] = 1$

osc. armónicos
en Mec.
cuántica

Definición: $a_{\vec{u}, \lambda} = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{u}}}{2\pi}} c_{\vec{u}, \lambda}$; $a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{u}}}{2\pi}} c_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger}$
 operador de destrucción operador de creación

o t:cte

son tales que: $[a_{\vec{u}, \lambda}, a_{\vec{u}', \lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{u}\vec{u}'} \delta_{\lambda\lambda'}$ $\left(\begin{array}{l} [a, a^{\dagger}] = 1 \text{ bosones} \\ [a^{\dagger}, a^{\dagger}] = [a, a] = 0 \end{array} \right)$

Explícitamente:

$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\vec{u}} \sum_{\lambda=1}^2 \left\{ a_{\vec{u}, \lambda} \vec{\epsilon}_{\lambda}(\vec{u}) \frac{e^{-i(\omega t - \vec{u} \cdot \vec{x})}}{\sqrt{2\pi}} + a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} \vec{\epsilon}_{\lambda}^*(\vec{u}) \frac{e^{i(\omega t - \vec{u} \cdot \vec{x})}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$

como $H = \frac{1}{4\pi} \sum_{\vec{u}, \lambda} \left[c_{\vec{u}, \lambda} c_{\vec{u}, \lambda}^\dagger + c_{\vec{u}, \lambda}^\dagger c_{\vec{u}, \lambda} \right]$

$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} \omega_{\vec{u}} \left[a_{\vec{u}, \lambda} a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger + a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger a_{\vec{u}, \lambda} \right] =$

$a a^\dagger - a^\dagger a = 1$

$= \sum_{\vec{u}, \lambda} \omega_{\vec{u}} \left(a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger a_{\vec{u}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$

$\Rightarrow H = \sum_{\vec{u}, \lambda} \omega_{\vec{u}} \left(\frac{1}{2} + a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger a_{\vec{u}, \lambda} \right) \equiv \sum_{\vec{u}, \lambda} \omega_{\vec{u}} \left(N_{\vec{u}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$

$N_{\vec{u}, \lambda} = a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger a_{\vec{u}, \lambda}$ operador número de fotones

Este es el Hamiltoniano del campo EM cuántico cuando el campo es libre.

• Nota: en el espacio plano y sin contornos (conductores o cuerpos dieléctricos) el cero ($N=0$) de energía no tiene significado físico. Existe un " ∞ " ($\sum \omega_{\vec{u}} \frac{1}{2}$) que puede eliminarse por "decreto". Suele usarse el orden normal de operadores (se pone a la izquierda $a^\dagger$)

$\Rightarrow : H : = \sum_{\vec{u}, \lambda} \omega_{\vec{u}} a_{\vec{u}, \lambda}^\dagger a_{\vec{u}, \lambda}$ y se " $\hat{=}$ " al ∞ .

Cuando hay contornos, este " ∞ " tiene significado físico y puede medirse: EFECTO CASIMIR.

• Estado fundamental: $|0_{\bar{u},\lambda}\rangle / a_{\bar{u},\lambda} |0_{\bar{u},\lambda}\rangle = 0$ 14

• Primer estado excitado: $|1_{\bar{u},\lambda}\rangle = a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle$

autoestado de
H

$$H |1_{\bar{u},\lambda}\rangle = \omega_{\bar{u}} \left(a_{\bar{u},\lambda}^\dagger a_{\bar{u},\lambda} + \frac{1}{2} \right) a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle$$

$$= \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger a_{\bar{u},\lambda} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle =$$

$$= \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle + \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger a_{\bar{u},\lambda} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle = \frac{3}{2} \omega_{\bar{u}} a_{\bar{u},\lambda}^\dagger |0_{\bar{u},\lambda}\rangle$$

$$H |1_{\bar{u},\lambda}\rangle = \frac{3}{2} \omega_{\bar{u}} |1_{\bar{u},\lambda}\rangle$$

• m-ésimo estado:

el oscilador para $\bar{u}, \lambda$, está en el estado $|m\rangle$

$$|m_{\bar{u},\lambda}\rangle = \frac{(a_{\bar{u},\lambda}^\dagger)^{m_{\bar{u},\lambda}}}{\sqrt{m_{\bar{u},\lambda}}} |0_{\bar{u},\lambda}\rangle$$

• todos los osciladores

fundamental: $|0\rangle = |0_{\bar{u}_1,\lambda_1}\rangle \otimes |0_{\bar{u}_2,\lambda_2}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{\bar{u}_j,\lambda_j}\rangle$

m-ésimo estado: $|m_{\bar{u}_1,\lambda_1}, m_{\bar{u}_2,\lambda_2}, \dots, m_{\bar{u}_j,\lambda_j}\rangle$

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{2\pi}{V}} i \sum_{\vec{u}, \lambda} \sqrt{\omega} \left[a_{\vec{u}, \lambda} \vec{e}_{\vec{u}, \lambda} e^{i\vec{u} \cdot \vec{x}} - h.c. \right]$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{2\pi}{V}} i \sum_{\vec{u}, \lambda} \frac{1}{\omega} \left[a_{\vec{u}, \lambda} \vec{u} \times \vec{e}_{\vec{u}, \lambda} e^{i\vec{u} \cdot \vec{x}} - h.c. \right]$$

Impulso del campo

$$\frac{1}{c\omega} \int d^3x \vec{E} \times \vec{B} = - \frac{1}{2V} \int d^3x \sum_{\substack{\vec{u}, \lambda \\ \vec{u}', \lambda'}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left[a_{\vec{u}, \lambda} \vec{e}_{\vec{u}, \lambda} e^{i\vec{u} \cdot \vec{x}} - h.c. \right] \times \left[a_{\vec{u}', \lambda'} (\vec{u}' \times \vec{e}_{\vec{u}', \lambda'}) e^{i\vec{u}' \cdot \vec{x}} - h.c. \right]$$

⇒ después de algunos cálculos:

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} a_{\vec{u}, \lambda} a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} \vec{e}_{\vec{u}, \lambda} \times (\vec{u} \times \vec{e}_{\vec{u}, \lambda}) + a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} a_{\vec{u}, \lambda} \vec{e}_{\vec{u}, \lambda} \times (\vec{u} \times \vec{e}_{\vec{u}, \lambda})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} (a_{\vec{u}, \lambda} a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} + a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} a_{\vec{u}, \lambda}) \underbrace{\vec{e}_{\vec{u}, \lambda} \times (\vec{u} \times \vec{e}_{\vec{u}, \lambda})}_{\vec{u}}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} \vec{u} \underbrace{(a a^{\dagger} + a^{\dagger} a)}_{1 + a^{\dagger} a}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} \vec{u} (1 + 2a^{\dagger} a) = \sum_{\vec{u}, \lambda} \vec{u} a_{\vec{u}, \lambda}^{\dagger} a_{\vec{u}, \lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{u}, \lambda} \vec{u}$$

— 0 —

$$\vec{P} |n_{\vec{u}, \lambda}\rangle = n \vec{u} |n_{\vec{u}, \lambda}\rangle$$

$\vec{P} |1_{\vec{u}, \lambda}\rangle = \vec{u} |1_{\vec{u}, \lambda}\rangle \Rightarrow |1_{\vec{u}, \lambda}\rangle$ es autoestado de energía con autovalor $\hbar$ y autoestado de Impulso, con autovalor $\vec{u}$

Veamos el efecto de H y P sobre el estado de un fotón:

$$H a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle = \hbar \omega a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad ; \quad P a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle = \hbar \vec{k} a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle$$

Vemos que: $\hbar \omega = \hbar |\vec{k}| c$ y $\hbar \vec{k}$ son, respectivamente, la energía y el momento del fotón.

La masa del fotón está dada por:

$$\begin{aligned} (mass)^2 &= \left(\frac{1}{c^4}\right) (\epsilon^2 - |\vec{p}|^2 c^2) \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(\hbar \omega)^2 - (\hbar |\vec{k}| c)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Interpretamos el estado de 1 fotón

1 fotón $\begin{cases} \rightarrow \text{energía } \hbar \omega \\ \rightarrow \text{Impulso } \hbar \vec{k} \end{cases}$

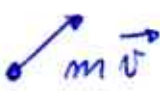
$|n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, \dots, n_{\vec{k}_j, \lambda_j}\rangle = \text{muchos fotones}$

$$\vec{h} = \hat{n} \hbar \frac{\omega}{c}$$

Espin del fotón

[17]

- La interpretación de " λ " sale del impulso angular del campo.
- El spin es una propiedad intrínseca.

Ej)  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{J} = \vec{v} \cdot (\vec{L} + \vec{S})$

Si tiene momento angular
en la dirección del movimiento
 $\rightarrow$ porque debe ser intrínseco

(spin)

- Podemos ver que las partículas que emergen de la cuantización del campo EM (fotones) tienen $S=1$. El spin está conectado a la estructura del campo. La cuantización de un campo vectorial siempre da $S=1$, mientras que un campo escalar tiene $S=0$. Hoy que analizar cómo se comporta el campo frente a rotaciones. ($S \leftrightarrow$ momento angular)

• $H = \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$ generador de traslaciones temporales

• $\vec{P} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \vec{k} a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda}$ generador de traslaciones espaciales

• Operador de momento angular seris:

L18

$$\Omega^i = -\frac{i}{4\pi} \int d^3x \frac{\partial A^b}{\partial t} (L^i A^b - i \epsilon_{ibc} A^c)$$



name de $\Omega^i = \frac{1}{4\pi} \int d^3x [\vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B})]^i$; $L = -i(\vec{x} \times \vec{\nabla})$

Ahora bien: $\Omega^i = \Omega_L^i + \Omega_{spin}^i$

Asociado con
transformaciones
de los argumentos
de los campos (x_μ)



Asociado con transformaciones
de los indices del campo

$$\Omega_{spin}^i = - \int d^3x \frac{\partial A^j}{\partial t} \epsilon_{ijn} A^n$$

una expansion

del A en terminos de $a_{\vec{u},\lambda}$ y $a_{\vec{u},\lambda}^+$

$$\begin{aligned} \Omega_{spin}^i &= i \sum_{\vec{u}, \lambda, \lambda'} \frac{\epsilon_{ijn}}{2} \left(\epsilon_{\vec{u}}^{\lambda j} \epsilon_{-\vec{u}}^{\lambda' n} \left[a_{\vec{u},\lambda} a_{-\vec{u},\lambda'} e^{-2i\omega_{\vec{u}}t} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{\vec{u},\lambda}^+ a_{-\vec{u},\lambda'}^+ e^{2i\omega_{\vec{u}}t} \right] + \right. \\ &\quad \left. + a_{\vec{u},\lambda}^+ a_{\vec{u},\lambda} \left(\epsilon_{\vec{u}}^{\lambda j} \epsilon_{\vec{u}}^{\lambda' n} - \epsilon_{\vec{u}}^{\lambda' j} \epsilon_{\vec{u}}^{\lambda n} \right) \right) \Bigg\} \\ &= i \sum_{\vec{u}, \lambda, \lambda'} \underbrace{(\epsilon_{\vec{u}}^{\lambda} \times \epsilon_{\vec{u}}^{\lambda'})}_{\hat{h}} a_{\vec{u},\lambda}^+ a_{\vec{u},\lambda} \end{aligned}$$

$$\Omega_{spin} = i \sum_{\vec{u}} \hat{h} (a_{\vec{u},2}^+ a_{\vec{u},1} - a_{\vec{u},1}^+ a_{\vec{u},2})$$

• Cambio a base circular

$$e^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^1 + i\epsilon^2) ; e^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon^1 - i\epsilon^2)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_+ - a_-) \text{ y } a_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (a_+ + a_-)$$

(Tales que: $[a_+, a_+^\dagger] = [a_-, a_-^\dagger] = 1$; $[a_+, a_-^\dagger] = [a_-, a_+^\dagger] = 0$)

$$\Rightarrow \Omega_{spin} = \sum_u k \left[a_{u,+}^\dagger a_{u,+} - a_{u,-}^\dagger a_{u,-} \right]$$

¿Cuál es el spin del fotón? $\rightarrow$ debería ser 1, 2, 3

operador número de fotones con helicidad definida

$S = 2s + 1$ estados. Pero el

Fotón tiene 2 polarizaciones

$\Rightarrow$ ~~cuatro~~

+

$$|1\bar{u}_\pm\rangle = a_{\bar{u}_\pm} |0\bar{u}_\pm\rangle$$

↓
Proyección del spin en la dirección del mov.

$$\vec{h} \cdot \vec{J} |1\bar{u}_\pm\rangle = \pm \underset{s=1}{|1\bar{u}_\pm\rangle}$$

El hecho que el fotón tenga masa $m=0$ hace que desaparezca 1 spin ($s=0$) $\Rightarrow$ el estado $|1\bar{u}_\pm\rangle \rightarrow \vec{h}, |\hbar|$

helicidad ± 1

