3.2 Campos de espín $\frac{1}{2}$

3.2.1 Campo de Dirac

Para cuantizar el campo de Dirac, que es un campo complejo,

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\boldsymbol{p},s} u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} v^{(s)}(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right), \tag{3.35}$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \sum_{r=1,2} \left(a^\dagger_{\boldsymbol{q},r} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} + b_{\boldsymbol{q},r} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \right), \tag{3.36}$$

convertimos los coeficientes $a_{\boldsymbol{p},s}$, $b_{\boldsymbol{p},s}$ y sus complejos conjugados en operadores y sus operadores adjuntos, como hicimos con el campo escalar. Antes de imponer ninguna relación de (anti)conmutación sobre los mismos, veamos qué forma tiene el operador hamiltoniano resultante (de nuevo hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \int \mathrm{d}^3 x\, \theta^{00} = \int \mathrm{d}^3 x\, \psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0 \psi = \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \\
&\times \sum_{r,s} \Big\{ a^\dagger_{\boldsymbol{q},r} a_{\boldsymbol{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) E_{\boldsymbol{p}} u^{(s)}(\boldsymbol{p}) - b_{\boldsymbol{q},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) E_{\boldsymbol{p}} v^{(s)}(\boldsymbol{p}) \\
&\qquad - a^\dagger_{\boldsymbol{q},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) E_{\boldsymbol{p}} v^{(s)}(\boldsymbol{p}) + b_{\boldsymbol{q},r} a_{\boldsymbol{p},s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) E_{\boldsymbol{p}} u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \Big\{ a^\dagger_{\boldsymbol{p},r} a_{\boldsymbol{p},s} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p}) u^{(s)}(\boldsymbol{p}) - b_{\boldsymbol{p},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p}) v^{(s)}(\boldsymbol{p}) \\
&\qquad\qquad - a^\dagger_{-\boldsymbol{p},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} u^{(r)\dagger}(-\boldsymbol{p}) v^{(s)}(\boldsymbol{p}) + b_{-\boldsymbol{p},r} a_{\boldsymbol{p},s} v^{(r)\dagger}(-\boldsymbol{p}) u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \Big\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_s (a^\dagger_{\boldsymbol{p},s} a_{\boldsymbol{p},s} - b_{\boldsymbol{p},s} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}), \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado

$$
\begin{gathered}
u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p}) u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}} \delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p}) v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}} \delta_{rs}, \\
u^{(r)\dagger}(-\boldsymbol{p}) v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = v^{(r)\dagger}(-\boldsymbol{p}) u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = 0. \qquad (3.38)
\end{gathered}
$$

Si ahora impusiéramos las mismas reglas de conmutación que al campo escalar complejo y aplicáramos el orden normal (substracción de la energía del vacío), obtendríamos un hamiltoniano no acotado inferiormente, pues los estados creados por $b^\dagger_{\boldsymbol{p}}$, que llamaremos antipartículas, contribuyen con energía negativa arbitrariamente grande. Para obtener un espectro de energías que tenga sentido, debemos imponer las *reglas de anticonmutación*

$$
\begin{aligned}
&\{\psi(t,\boldsymbol{x}),\Pi_\psi(t,\boldsymbol{y})\} = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\{\psi(t,\boldsymbol{x}),\psi(t,\boldsymbol{y})\} = \{\Pi_\psi(t,\boldsymbol{x}),\Pi_\psi(t,\boldsymbol{y})\} = 0 \\
&\qquad\qquad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \{a_{\boldsymbol{p},r},a^\dagger_{\boldsymbol{q},s}\} = \{b_{\boldsymbol{p},r},b^\dagger_{\boldsymbol{q},s}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta_{rs} \\ \{a_{\boldsymbol{p},r},a_{\boldsymbol{q},s}\} = \{b_{\boldsymbol{p},r},b_{\boldsymbol{q},s}\} = \{a_{\boldsymbol{p},r},b^\dagger_{\boldsymbol{q},s}\} = 0. \end{array}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

y definir, consistentemente, el *orden normal para operadores fermiónicos*,

$$
:a_{\boldsymbol{p},r}a^\dagger_{\boldsymbol{p},r}: \equiv -a^\dagger_{\boldsymbol{p},r}a_{\boldsymbol{p},r}, \quad :b_{\boldsymbol{p},r}b^\dagger_{\boldsymbol{p},r}: \equiv -b^\dagger_{\boldsymbol{p},r}b_{\boldsymbol{p},r}, \tag{3.40}
$$

lo que conduce al hamiltoniano

$$
\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x \ :\psi^\dagger \mathrm{i}\partial_0\psi: = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_s (a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s} + b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s}). \tag{3.41}
$$

Análogamente, para el operador momento se obtiene

$$
P^i = \int \mathrm{d}^3x \ :\theta^{0i}: = \int \mathrm{d}^3x \ :\psi^\dagger \mathrm{i}\partial^i\psi: = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} p^i \sum_s (a^\dagger_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s} + b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s}). \tag{3.42}
$$

El momento angular (carga de Noether conservada asociada a la invariancia bajo rotaciones) tiene una parte orbital (idéntica a la del campo escalar) y otra de espín (adicional). Aplicando las expresiones generales para las corrientes de Noether, se puede demostrar que la parte de espín en la representación quiral es

$$\boldsymbol{S} = \int \mathrm{d}^3x \ : \psi^\dagger \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \psi : \quad \text{donde } \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Expresado en el espacio de Fock, el espín en la dirección del eje z queda

$$\begin{aligned} S_z = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \\ \times \sum_{r,s} : \Big\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} a^\dagger_{\boldsymbol{q},r} a_{\boldsymbol{p},s} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \Sigma^3 u^{(s)}(\boldsymbol{p}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} b_{\boldsymbol{q},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \Sigma^3 v^{(s)}(\boldsymbol{p}) \\ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} a^\dagger_{\boldsymbol{q},r} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \Sigma^3 v^{(s)}(\boldsymbol{p}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} b_{\boldsymbol{q},r} a_{\boldsymbol{p},s} v^{(r)\dagger}(\boldsymbol{q}) \Sigma^3 u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \Big\} : . \end{aligned} \tag{3.44}$$

Entonces el espín J_z del estado creado por $a^\dagger_{\boldsymbol{p},s} |0\rangle$ o $b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} |0\rangle$ en su sistema de referencia en reposo ($\boldsymbol{p} = 0$) se obtiene aplicando S_z a estos estados. Recordemos que

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\, \xi^{(s)}, \quad v_L^{(s)}(0) = -v_R^{(s)}(0) = \sqrt{m}\, \eta^{(s)} \tag{3.45}$$

y que hemos introducido

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

La última línea en (3.44) se anula aplicando (3.38) y obtenemos

$$S_z \, a^\dagger_{0,1} \left|0\right\rangle = +\frac{1}{2} a^\dagger_{0,1} \left|0\right\rangle , \quad S_z \, a^\dagger_{0,2} \left|0\right\rangle = -\frac{1}{2} a^\dagger_{0,2} \left|0\right\rangle , \tag{3.47}$$

$$S_z \, b^\dagger_{0,1} \left|0\right\rangle = +\frac{1}{2} b^\dagger_{0,1} \left|0\right\rangle , \quad S_z \, b^\dagger_{0,2} \left|0\right\rangle = -\frac{1}{2} b^\dagger_{0,2} \left|0\right\rangle , \tag{3.48}$$

donde se ha tenido en cuenta que $: b_{\boldsymbol{p},s} b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} : = -b^\dagger_{\boldsymbol{p},s} b_{\boldsymbol{p},s}$. *Nótese* que gracias a que dado un s hemos introducido $\eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2 \xi^{(s)*}$ para los espinores de las antipartículas, que es autovector de σ^3 con autovalor opuesto al de $\xi^{(s)}$, los *estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen el mismo espín*.

Como $[K_z, J_z] = 0$, el estado resultante de hacer un *boost* en la dirección del eje z (en la que hemos definido el espín) sigue siendo un autoestado del espín. A la proyección del espín en la dirección del movimiento se le llama helicidad y se puede comprobar usando las expresiones explícitas de los espinores

$$\hat{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\, u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = +u^{(1)}(\boldsymbol{p})\,, \qquad \hat{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\, u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = -u^{(2)}(\boldsymbol{p}) \tag{3.49}$$

$$\hat{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\, v^{(1)}(\boldsymbol{p}) = -v^{(1)}(\boldsymbol{p})\,, \qquad \hat{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\, v^{(2)}(\boldsymbol{p}) = +v^{(2)}(\boldsymbol{p})\,, \tag{3.50}$$

con lo que el resultado de (3.47) y (3.48) es extensible a los estados de helicidad:

$$\hat{p}\cdot\boldsymbol{S}\; a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},1}\,|0\rangle = +\frac{1}{2}a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},1}\,|0\rangle\,, \quad \hat{p}\cdot\boldsymbol{S}\;\; a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},2}\,|0\rangle = -\frac{1}{2}a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},2}\,|0\rangle \tag{3.51}$$

$$\hat{p}\cdot\boldsymbol{S}\; b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},1}\,|0\rangle = +\frac{1}{2}b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},1}\,|0\rangle\,, \quad \hat{p}\cdot\boldsymbol{S}\;\; b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},2}\,|0\rangle = -\frac{1}{2}b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},2}\,|0\rangle\,, \tag{3.52}$$

es decir, los *estados de partícula y antipartícula con el mismo s tienen la misma helicidad*. Recordemos por último que las helicidades son invariantes Lorentz solamente para estados sin masa (quiralidades).

En cuanto a la carga U(1),

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\ \ :\psi^{\dagger}\psi: = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s (a^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{p},s} - b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s}b_{\boldsymbol{p},s}). \tag{3.53}$$

Por tanto, el campo cuántico ψ destruye partículas y crea antipartículas de igual masa, espín $\frac{1}{2}$ y carga opuesta.

Veamos ahora qué significan las etiquetas $s = 1, 2$ de los autoestados de espín. Asociamos s con el espín del fermión correspondiente a lo largo de una dirección dada. Consideremos una dirección cualquiera $\hat{\boldsymbol{n}}(\theta, \varphi)$. Entonces los *autoestados de espín en esa dirección* son

$$\begin{aligned}
\xi^{(s)} &= (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow)) \\
\xi(\uparrow) &\equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{pues } (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi(\uparrow) = +\xi(\uparrow), & (3.54) \\
\xi(\downarrow) &\equiv D^{\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{pues } (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi(\downarrow) = -\xi(\downarrow). & (3.55)
\end{aligned}$$

(En particular, $\xi^{(s)} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ son los autoestados de espín a lo largo del eje z.) Pues bien, el estado que tiene *espín opuesto* a cualquier ξ es $\eta = -i\sigma^2\xi^*$, pues si $(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = \xi$ entonces

$$(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\eta = (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})(-i\sigma^2\xi^*) = i\sigma^2\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*\xi^* = -(-i\sigma^2\xi^*) = -\eta, \tag{3.56}$$

donde se ha usado que $\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^*$. Así que podemos denotar también

$$\xi^{(-s)} \equiv \eta^{(s)} = -\mathrm{i}\sigma^2\xi^{(s)*} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)) \tag{3.57}$$

para recordarnos que son *autoestados con espín opuesto* al dado. Nótese, por cierto, que una doble inversión del espín de ξ lo lleva a

$$-\mathrm{i}\sigma^2\eta^* = -\mathrm{i}\sigma^2(-\mathrm{i}\sigma^2\xi^*)^* = \sigma^2\sigma^{2*}\xi = -\xi \tag{3.58}$$

que no coincide con ξ, lo que refleja el hecho de que un giro de 2π no devuelve un sistema de espín $\frac{1}{2}$ a su estado original (para ello hay que rotar 4π).

Resumiendo, los espinores que introdujimos en el tema anterior son

$$u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\,\xi^{(s)} \\ \sqrt{p\overline{\sigma}}\,\xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\,\xi^{(-s)} \\ -\sqrt{p\overline{\sigma}}\,\xi^{(-s)} \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

Así que, dado el campo $\psi(x)$ de (3.35), el operador $a_{\boldsymbol{p},s}$ destruye partículas cuyo espinor $u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ contiene a $\xi^{(s)}$ y el operador $b^\dagger_{\boldsymbol{p},s}$ crea antipartículas cuyo espinor $v^{(s)}(\boldsymbol{p})$ contiene a $\xi^{(-s)}$. Esto simplificará mucho las cosas. Por ejemplo, veremos en §3.2.3 que el conjugado de carga del campo $\psi(x)$ intercambia partículas por antipartículas preservando el *mismo estado s*, es decir, con el *mismo espín* o la *misma helicidad*.