3.3 Campo electromagnético

Recordemos que en el gauge de radiación,

$$A^0(x) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{3.83}$$

las tres componentes no nulas de $A^\mu(x)$ satisfacen una ecuación de Klein-Gordon sin masa,

$$\Box A^i = 0. \tag{3.84}$$

Sus soluciones son de la forma

$$\boldsymbol{A}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) a_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \boldsymbol{\epsilon}^*(\boldsymbol{k},\lambda) a^*_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \tag{3.85}$$

con

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}), \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}| && \Leftarrow \quad k^2 = 0, \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) &= 0 && \Leftarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \end{aligned} \tag{3.86}$$

y $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},1)$, $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},2)$ dos *vectores de polarización* ortogonales entre sí. Hallemos los momentos conjugados,

$$\Pi^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \quad \text{pues } \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.87}$$

$$\Pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i}(x) = -\partial^0 A^i(x) = E^i(x) \quad \text{(campo eléctrico).} \tag{3.88}$$

Vemos que $A^0(x) = 0$ (en este gauge) y $\Pi^0(x) = 0$ (en general), así que no son variables dinámicas. Para cuantizar el campo electromagnético promovemos, como hasta ahora, $\boldsymbol{A}(x)$ a operador e imponemos

$$[a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^\dagger_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \delta_{\lambda\lambda'} \, , \quad [a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = [a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^\dagger_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = 0, \tag{3.89}$$

donde $a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ ($a_{\boldsymbol{k},\lambda}$) son operadores sobre el espacio de Fock que crean (destruyen) *fotones*.

3.3.2 Cuantización covariante

Nos gustaría poder imponer una cuantización covariante,

$$[A^\mu(t,\boldsymbol{x}),\Pi^\nu(t,\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}g^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ , \quad [A^\mu(t,\boldsymbol{x}),A^\nu(t,\boldsymbol{y})] = 0\ , \tag{3.106}$$

sin embargo eso no es posible pues, como hemos visto en (3.87) y (3.88), $\Pi^0(x) = 0$. En cambio, si el lagrangiano fuera

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\ , \tag{3.107}$$

que *no es el langragiano de Maxwell*, tendríamos

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Pi^0(x) = -\partial_\mu A^\mu(x) \\ \Pi^i(x) = -F^{0i} = E^i(x) \quad \text{(como antes)} \end{array} \tag{3.108}$$

y reescribiendo

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \tag{3.109}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \partial_\mu \left(-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha \right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \\
&\Rightarrow \quad \Box A^\nu = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

es decir, A^μ tiene masa cero, donde se ha usado

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\
&\partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha) = \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \, ,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

cuyas soluciones son

$$A^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left(\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, \lambda) a_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \epsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k}, \lambda) a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \, . \tag{3.112}$$

Como ahora no hemos impuesto $\epsilon^0 = 0$ ni $k_\mu \epsilon^\mu = 0$, el campo A^μ tiene cuatro grados de libertad, que etiquetamos mediante $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Obviamente el lagrangiano $\mathcal{L}'$ no es invariante gauge. En particular, si tomamos $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ entonces $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, \lambda) = \delta^\mu_\lambda$, es decir, $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 1) = (0, 1, 0, 0)$, $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 2) = (0, 0, 1, 0)$, $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 3) = (0, 0, 0, 1)$. Solamente $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 1)$ y $\epsilon^\mu(\boldsymbol{k}, 2)$ satisfacen $k_\mu \epsilon^\mu = 0$.

Es fácil comprobar que las reglas de conmutación (3.106) implican

$$[a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \ , \quad [a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = [a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\boldsymbol{q},\lambda'}] = 0 \ , \tag{3.113}$$

donde

$$\zeta_0 = -1 \ , \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \ . \tag{3.114}$$

Los estados de una partícula,

$$|\boldsymbol{k},\lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} |0\rangle \tag{3.115}$$

tienen norma negativa para $\lambda = 0$, ya que

$$\langle \boldsymbol{q},\lambda|\boldsymbol{k},\lambda\rangle = 2\omega_{\boldsymbol{k}} \langle 0| a_{\boldsymbol{q},\lambda} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda} |0\rangle = 2\omega_{\boldsymbol{k}} \langle 0| [a_{\boldsymbol{q},\lambda}, a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},\lambda}] |0\rangle = \zeta_\lambda 2\omega_{\boldsymbol{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \ . \tag{3.116}$$

Esto no es aceptable, pues la normas se interpretan como probabilidades. De todas formas, el lagrangiano $\mathcal{L}'$ no es el del electromagnetismo y, si lo fuera, los estados $|\boldsymbol{k},0\rangle$ y $|\boldsymbol{k},3\rangle$ no son físicos.

Nos podemos plantear *recuperar* el electromagnetismo imponiendo que *sobre los estados físicos*,

$$\langle \text{fis}'|\, \partial_\mu A^\mu \,|\text{fis}\rangle = 0 \ . \tag{3.117}$$

Es decir, en lugar de tomar $\partial_\mu A^\mu = 0$ a nivel del lagrangiano, supondremos que el lagrangiano es $\mathcal{L}'$ pero imponemos la ecuación anterior sobre los estados físicos, lo que

se conoce como *cuantización de Gupta-Bleuler*. Veamos que en efecto esto es suficiente para eliminar del espacio de Fock todos los estados no físicos. Para ello, notemos que

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^- \tag{3.118}$$

donde hemos separado los estados de frecuencia positiva de los de frecuencia negativa,

$$\begin{aligned}(\partial_\mu A^\mu)^+ &= -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} k_\mu \epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda) a_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ (\partial_\mu A^\mu)^- &= \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} k_\mu \epsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k},\lambda) a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \ .\end{aligned} \tag{3.119}$$

Como $(\partial_\mu A^\mu)^- = [(\partial_\mu A^\mu)^+]^\dagger$, la condición (3.117) se satisface siempre que

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ \left|\text{fis}\right\rangle = 0 \ . \tag{3.120}$$

Además, como $(\partial_\mu A^\mu)^+$ es un operador lineal, si $|\text{fis}_1\rangle$ y $|\text{fis}_2\rangle$ son estados físicos también lo son una combinación arbitraria $\alpha\,|\text{fis}_1\rangle + \beta\,|\text{fis}_2\rangle$. Entonces, si tenemos un estado físico de una partícula

$$|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}\,|0\rangle \tag{3.121}$$

la condición (3.120) implica

$$\begin{aligned}
0 = (\partial_\mu A^\mu)^+\,|\psi\rangle &= -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{q}}}} \sum_{\lambda,\lambda'} c_\lambda q_\mu \epsilon^\mu(\boldsymbol{q},\lambda') a_{\boldsymbol{q},\lambda'} a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}\,|0\rangle \\
&\Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_\lambda \zeta_\lambda c_\lambda k_\mu \epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\,|0\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}}(c_0 + c_3)\,|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 + c_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.122}$$

si $k^\mu = (\omega_{\boldsymbol{k}}, 0, 0, \omega_{\boldsymbol{k}})$ y $\epsilon^\mu(k,\lambda) = \delta^\mu_\lambda$. Es decir un estado físico es una combinación arbitraria $|\psi_T\rangle$ de los estados transversos creados por $a^\dagger_{\boldsymbol{k},1}$ y $a^\dagger_{\boldsymbol{k},2}$, como esperábamos. Pero también es física una combinación de la forma

$$|\phi\rangle = (a^\dagger_{\boldsymbol{k},0} - a^\dagger_{\boldsymbol{k},3})\,|0\rangle \tag{3.123}$$

pues satisface la condición $c_0 + c_3 = 0$. Así que el subespacio de estados físicos de una partícula de momento $\boldsymbol{k}$ más general es de la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle \ , \quad |\psi_T\rangle = \sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}\,|0\rangle \ . \tag{3.124}$$

Sin embargo, vamos a ver que, primero

$$\langle\phi|\phi\rangle = 0\ , \quad \langle\psi_T|\phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle \tag{3.125}$$

y, segundo, $|\psi\rangle$ y $|\psi_T\rangle$ tienen la misma energía, momento, momento angular, etc. Por tanto, podemos introducir una relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \sim |\psi_T\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle \tag{3.126}$$

y elegir cualquier $|\psi\rangle$ de la clase $|\psi_T\rangle$ ya sea transverso o no, pues esta elección *no tiene consecuencias físicas*. En efecto, demostremos lo primero,

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle &= \langle 0|\,(a_{\boldsymbol{k},0}-a_{\boldsymbol{k},3})(a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}-a^\dagger_{\boldsymbol{k},3})\,|0\rangle = \langle 0|\,(a_{\boldsymbol{k},0}a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}+a_{\boldsymbol{k},3}a^\dagger_{\boldsymbol{k},3})\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\,([a_{\boldsymbol{k},0},a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}]+[a_{\boldsymbol{k},3},a^\dagger_{\boldsymbol{k},3}])\,|0\rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\langle\psi_T|\phi\rangle = \langle 0|\,(c_1^* a_{\boldsymbol{k},1}+c_2^* a_{\boldsymbol{k},2})(a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}-a^\dagger_{\boldsymbol{k},3})\,|0\rangle = 0\,. \tag{3.128}$$

y ahora demostremos lo segundo: la energía y el momento vienen dados por

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\boldsymbol{k}}\left(-a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}a_{\boldsymbol{k},0}+\sum_{\lambda=1,2,3}a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\right) \tag{3.129}$$

$$\mathbb{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{k}\left(-a^\dagger_{\boldsymbol{k},0}a_{\boldsymbol{k},0}+\sum_{\lambda=1,2,3}a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\right)\,. \tag{3.130}$$

Si calculamos los elementos de matriz de estos operadores, que contienen siempre la combinación $(-a^\dagger_{k,0}a_{k,0} + a^\dagger_{k,3}a_{k,3})$, entre dos estados físicos, tengamos en cuenta que sobre un estado físico $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c\,|\phi\rangle$,

$$(a_{k,0} - a_{k,3})\,|\psi\rangle = c(a_{k,0} - a_{k,3})\,|\phi\rangle = c(a_{k,0} - a_{k,3})(a^\dagger_{k,0} - a^\dagger_{k,3})\,|0\rangle = 0 \tag{3.131}$$

y, por tanto

$$\begin{aligned}
\left\langle \text{fis}'\right|(-a^\dagger_{k,0}a_{k,0} + a^\dagger_{k,3}a_{k,3})\left|\text{fis}\right\rangle &= \left\langle \text{fis}'\right|(-a^\dagger_{k,0}a_{k,0} + a^\dagger_{k,0}(a_{k,0} - a_{k,3}) + a^\dagger_{k,3}a_{k,3})\left|\text{fis}\right\rangle \\
&= \left\langle \text{fis}'\right|(-a^\dagger_{k,0}a_{k,3} + a^\dagger_{k,3}a_{k,3})\left|\text{fis}\right\rangle \\
&= -\left\langle \text{fis}'\right|(a^\dagger_{k,0} - a^\dagger_{k,3})a_{k,3})\left|\text{fis}\right\rangle = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.132}$$

lo que significa que a la energía y al momento solamente contribuyen los osciladores transversos.