Teoría de perturbaciones

4. Campos con interacciones, representación de interacción, funciones de correlación y diagramas de Feynman

Dada una teoría con interacciones del tipo: $H = H_0 + H_{\text{int}}$ Vamos a

definir el *campo en* ***el picture*** *de interacción*,

$$\phi_I(t, \boldsymbol{x}) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi(t_0, \boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)} \,, \tag{4.33}$$

que es un campo que coincide con el campo $\phi(t, \boldsymbol{x})$ ***del picture*** de Heisenberg solamente en un tiempo de referencia $t = t_0$ y que por definición es un campo libre,

$$\phi_I(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}) \,, \tag{4.34}$$

cuya evolución con el tiempo viene, por tanto, determinada por el hamiltoniano libre H_0. Recordemos que un campo en ***el picture*** de Heisenberg evoluciona con el tiempo según

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H(t-t_0)}\phi(t_0, \boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \,. \tag{4.35}$$

Así que, despejando de (4.33)

$$\phi(t_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi_I(t, \boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)} \tag{4.36}$$

vemos que $\phi(x)$ y $\phi_I(x)$ están relacionados mediante

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi_I(t,\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} = U^\dagger(t,t_0)\phi_I(t,\boldsymbol{x})U(t,t_0) \ , \quad (4.37)$$

$$U(t,t_0) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \ . \quad (4.38)$$

Vamos ahora a escribir perturbativamente ϕ en función de ϕ_I. Para ello notemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}(H-H_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}H_{\text{int}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \\
&= H_I(t)U(t,t_0) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

donde hemos introducido el *hamiltoniano en* el picture *de interacción*[a]

$$H_I(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}H_{\text{int}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)} \ . \quad (4.40)$$

La solución de la ecuación diferencial (4.39) con la condición de contorno $U(t,t)=1$ es (compruébese sustituyéndola en la ecuación):

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) &= 1 + (-\mathrm{i}) \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \; H_I(t_1) + (-\mathrm{i})^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \; H_I(t_1) H_I(t_2) \\
&\quad + (-\mathrm{i})^3 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_3 \; H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \\
&= 1 + (-\mathrm{i}) \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \; H_I(t_1) + (-\mathrm{i})^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \; T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \\
&\quad + (-\mathrm{i})^3 \frac{1}{3!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_3 \; T\{H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3)\} + \dots \\
&= T \left\{ \exp \left[-\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \; H_I(t') \right] \right\} \; . \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

[a] Nótese que en general $[H_0, H] = [H_0, H_{\text{int}}] \neq 0$.

Producto temporalmente ordenado

$$
T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x) \; , & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y) \; , & y^0 < x^0 \end{cases}
$$

Otra forma de escribir U que nos permite deducir propiedades útiles es

$$U(t,t') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t'-t_0)} \tag{4.42}$$

que efectivamente satisface $U(t,t) = 1$ y (4.39) pues

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}(H - H_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t'-t_0)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}H_{\text{int}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t'-t_0)} \\
&= H_I(t)U(t,t')\ .
\end{aligned} \tag{4.43}$$

De aquí se deduce fácilmente que U es unitario y que

$$\begin{aligned}
U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_1-t_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t_2-t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t_2-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_2-t_3)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t_3-t_0)} \\
&= U(t_1,t_3) \\
\Rightarrow \quad U(t_1,t_3)U^\dagger(t_2,t_3) &= U(t_1,t_2)\ .
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Veamos cómo calcular $\langle 0|\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|0\rangle$, donde ya hemos tomado las x_i ordenadas temporalmente ($t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n$),

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\,U^\dagger(t_1,t_0)\phi_I(x_1)U(t_1,t_0)U^\dagger(t_2,t_0)\phi_I(x_2)U(t_2,t_0)\cdots U^\dagger(t_n,t_0)\phi_I(x_n)U(t_n,t_0)\,|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\,U^\dagger(t_1,t_0)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)\phi_I(x_2)U(t_2,t_3)\cdots U(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U(t_n,t_0)\,|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\,U^\dagger(t,t_0)U(t,t_1)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U(t_n,-t)U(-t,t_0)\,|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\,U^\dagger(t,t_0)\;T\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)U(t,t_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_n,-t)\}\;U(-t,t_0)\,|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\,U^\dagger(t,t_0)\;T\left\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-t}^{t}\mathrm{d}t'\;H_I(t')\right]\right\}\;U(-t,t_0)\,|0\rangle
\end{aligned} \tag{4.45}$$

donde en sucesivos pasos hemos introducido $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \geq -t$ y sustituido

$$U^\dagger(t_1,t_0) = U^\dagger(t,t_0)U(t,t_1)\;, \quad U(t_n,t_0) = U(t_n,-t)U(-t,t_0) \tag{4.46}$$

$$U(t,t_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_n,-t) = U(t,-t) = T\left\{\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-t}^{t}\mathrm{d}t'\;H_I(t')\right]\right\}\;. \tag{4.47}$$

Tomando ahora $t_0 = -t$ con $t \to \infty$ y sustituyendo el adjunto de

$$U(\infty, -\infty)\,|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,|0\rangle \ , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \langle 0|\, T\left\{\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\ H_I(t')\right]\right\}|0\rangle \tag{4.48}$$

tenemos finalmente que

$$\boxed{\langle 0|\, T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}\,|0\rangle = \frac{\langle 0|\, T\left\{\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{H}_I(x)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\, T\left\{\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{H}_I(x)\right]\right\}|0\rangle}} \tag{4.49}$$

Desarrollando en serie las exponenciales que aparecen en esta expresión y utilizando el teorema de Wick, según veremos , podremos calcular orden a orden en teoría de perturbaciones la amplitud de *scattering* a partir de la fórmula LSZ con ayuda de los diagramas de Feynman

Conviene notar que la dependencia funcional de $\mathcal{H}_I$ en ϕ_I es la misma que la de $\mathcal{H}_{\text{int}}$ en ϕ. Por ejemplo,

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\frac{\lambda}{4!}\phi^4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)} \\ &= \frac{\lambda}{4!}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\right) \\ &\quad\times\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t_0)}\right) = \frac{\lambda}{4!}\phi_I^4 \; . \end{aligned} \tag{4.51}$$