

Propagador de Feynman. Causalidad

Halleemos el *propagador de Feynman*, definido como

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle . \quad (4.52)$$

De ahora *en adelante omitiremos el subíndice I*, pues siempre nos referiremos a campos en *el picture* de interacción, que se pueden descomponer en $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$ con

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} a_p e^{-ipx} , \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ipx} . \quad (4.53)$$

Recuérdese que $\phi^+ |0\rangle = 0$ y $\langle 0 | \phi^- = 0$. Entonces,^b

si $x^0 - y^0 > 0$:

$$\begin{aligned} T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(x)\phi(y) \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\ &= : \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] , \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde se ha sustituido

$$\begin{aligned}\phi^+(x)\phi^-(y) &= \phi^-(y)\phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \\ &=: \phi^+(x)\phi^-(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)]\end{aligned}\tag{4.55}$$

Análogamente,

si $x^0 - y^0 < 0$:

$$\begin{aligned}T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi(y)\phi(x) \\ &= \phi^+(y)\phi^+(x) + \phi^+(y)\phi^-(x) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(y)\phi^-(x) \\ &=: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(y), \phi^-(x)] ,\end{aligned}\tag{4.56}$$

^b Si $x^0 = y^0$ entonces los campos ya están ordenados temporalmente, así que también se cumple

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)] =: \phi(x)\phi(y) : + \overline{\phi(x)\phi(y)}$$

ya que entonces $[\phi^+(x), \phi^-(y)] = [\phi^+(y), \phi^-(x)]$.

ya que $:\phi(x)\phi(y): = :\phi(y)\phi(x):$. Por tanto,

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = :\phi(x)\phi(y): + D_F(x-y) \quad (4.57)$$

donde

$$D_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0)\Delta(x-y) + \theta(y^0 - x^0)\Delta(y-x) \quad (4.58)$$

y como $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$,

$$\Delta(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-y)}. \quad (4.59)$$

Así que el propagador de Feynman es

$$\langle 0| T\{\phi(x)\phi(y)\} |0\rangle = \langle 0| (:\phi(x)\phi(y): + D_F(x-y)) |0\rangle = D_F(x-y) \quad (4.60)$$

Veamos que podemos escribir (*prescripción de Feynman*)

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (4.61)$$

En efecto,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} \quad (4.62)$$

donde se ha escrito $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = (p^0)^2 - E_p^2$ pues recordemos que $E_p \equiv +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Por otro lado, nótese que

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} \quad (4.63)$$

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{+ip(x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \frac{e^{+iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} \quad (4.64)$$

(en la segunda línea se ha cambiado \mathbf{p} por $-\mathbf{p}$). Así que basta demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} = \theta(x^0 - y^0) \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} + \theta(y^0 - x^0) \frac{e^{+iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} \quad (4.65)$$

donde nótese que, cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon = \left[p^0 + \left(E_p - i\frac{\epsilon}{2E_p} \right) \right] \left[p^0 - \left(E_p - i\frac{\epsilon}{2E_p} \right) \right] \quad (4.66)$$

Para evaluar la integral sobre p^0 en (4.62) hay que elegir el contorno apropiado sobre el plano de p^0 complejo (figura 4.1). El factor $i\epsilon$ aleja ligeramente los polos del eje real. El polo $p^0 = E_p$ se desplaza hacia abajo, $p^0 = E_p - i\epsilon / (2E_p)$ y el polo $p^0 = -E_p$ se desplaza hacia arriba, $p^0 = -E_p + i\epsilon / (2E_p)$. Así si $x^0 - y^0 > 0$ conviene cerrar el contorno en el plano inferior, rodeando el polo $p^0 = E_p - i0^+$ en *sentido horario* de modo que

$$\oint f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) > 0$$

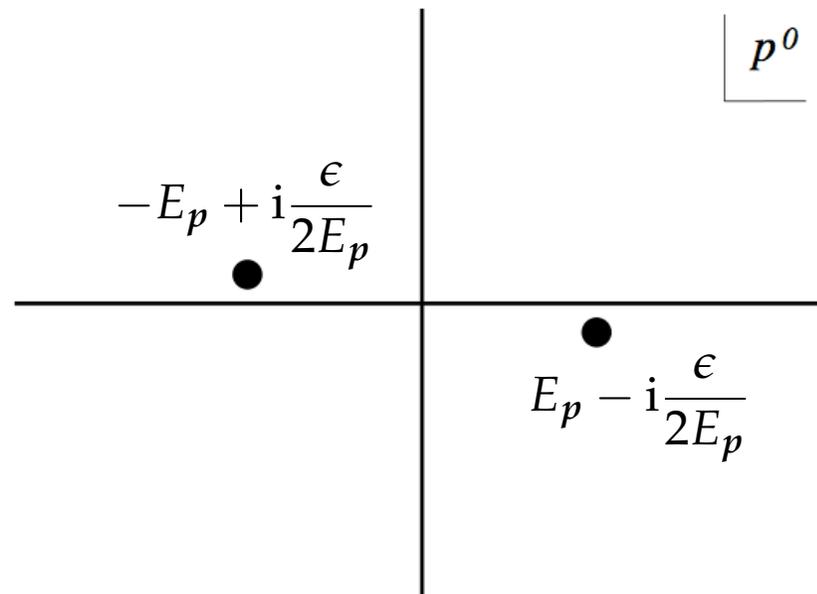


Figura 4.1: Posición de los polos en el plano de p^0 complejo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} = -2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow E_p} (p^0 - E_p) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_p)(p^0 - E_p)} = \frac{e^{-iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} .$$

(4.67)

Y si $x^0 - y^0 < 0$ cerramos por arriba, rodeando $p^0 = -E_p + i0^+$ en *sentido antihorario*

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z = z_0) \quad \text{si } (x^0 - y^0) < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} = 2\pi i \lim_{p^0 \rightarrow -E_p} (p^0 + E_p) \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(2\pi)(p^0 + E_p)(p^0 - E_p)} = \frac{e^{+iE_p(x^0-y^0)}}{2E_p} .$$

(4.68)

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-iE_p(x^0-y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{iE_p(x^0-y^0)} \right] \\ &= \theta(x^0 - y^0) \Delta(x-y) + \theta(y^0 - x^0) \Delta(y-x) , \end{aligned}$$

(4.69)

como queríamos demostrar.^c

La expresión (4.61) es conveniente porque de ella se lee directamente el propagador de Feynman en el espacio de momentos, $\tilde{D}_F(p)$,

$$D_F(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}_F(p) \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.70)$$

Nótese también que $D_F(x - y)$ es *una* función de Green del operador de Klein-Gordon $(\square_x + m^2)$ pues

$$(\square_x + m^2)D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x - y) \quad (4.71)$$

(independientemente de la prescripción adoptada para sortear los polos) lo que justifica por qué hemos llamado función de Green de N puntos a $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \} | 0 \rangle$. Nótese además que el propagador de Feynman no es la única función de Green del operador de Klein-Gordon, pues cambiando la prescripción se obtienen otras.

^c Ahora ya entendemos por qué hemos introducido el factor 2 en la normalización covariante relativista de los estados.

Causalidad

El propagador de Feynman $D_F(x - y)$ expresa la amplitud de probabilidad de que una partícula que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o que se propague y a x , si $x^0 - y^0 < 0$. En efecto,

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x - y) = \Delta(x - y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(y) | 0 \rangle . \quad (4.72)$$

Veamos que, aparentemente, surge un problema: la probabilidad de propagación de una partícula desde y hasta x con $(x - y)^2 < 0$ (*intervalo espacial*), es decir, fuera de su cono de luz no es cero sino que cae exponencialmente para distancias grandes. En efecto, en tal caso podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (0, r)$ y entonces (aquí llamaremos $p \equiv |\mathbf{p}|$ y $r \equiv |\mathbf{r}|$)

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{2E_p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr \cos \theta}}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = -\frac{i}{(2\pi)^2 2r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} . \end{aligned} \quad (4.73)$$

En el plano de p complejo, el integrando tiene *cortes de rama* que comienzan en $p = \pm im$ (figura 4.2). Podemos evaluar la integral llevando el contorno alrededor de la rama superior (introduce un factor 2) y haciendo el cambio de variable $p = i\rho$,

$$\Delta(x - y) = -\frac{i}{(2\pi)^2 2r} i^2 2 \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{i\sqrt{\rho^2 - m^2}} = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}}. \quad (4.74)$$

Por último, haciendo el cambio de variable $\rho = mt$,

$$\Delta(x - y) = \frac{m}{4\pi^2 r} \int_1^\infty dt \frac{te^{-mrt}}{t^2 - 1} = \frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) \xrightarrow{mr \gg 1} \frac{m}{4\pi^2 r} \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}, \quad (4.75)$$

donde se ha usado el límite de la función de Bessel modificada K_1 .

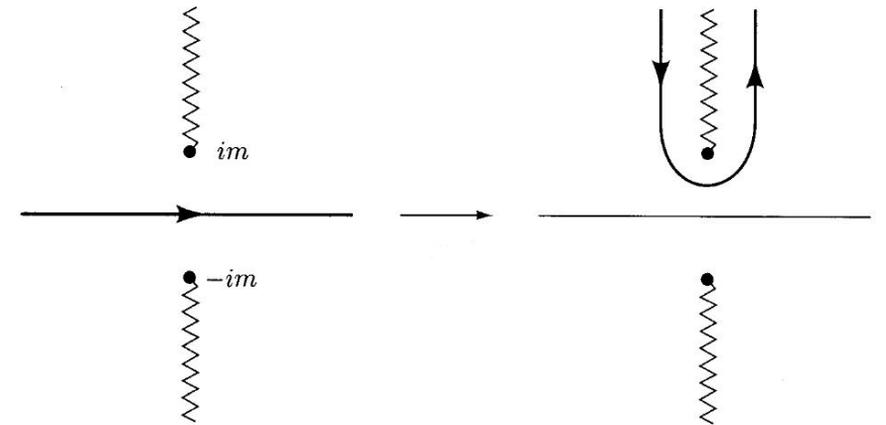


Figura 4.2: Contorno para integrar $\Delta(x - y)$ en un intervalo espacial.

Este resultado parece indicarnos que se viola causalidad. Sin embargo no es así. En mecánica cuántica *lo importante es si conmutan dos observables medidos en x e y separados espacialmente*, i.e. con $(x - y)^2 < 0$. En tal caso ambas medidas no están correlacionadas y por tanto no pueden afectar una a la otra. En la práctica, el principio de causalidad se preserva siempre que *se anule el conmutador de dos campos evaluados en dos puntos separados por un intervalo espacial*. Veamos que en efecto, en ese caso, el conmutador se anula.

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} \left[\left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right), \left(a_q e^{-iqy} + a_q^\dagger e^{iqy} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} \left\{ e^{-i(px - qy)} [a_p, a_q^\dagger] + e^{i(px - qy)} [a_p^\dagger, a_q] \right\} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right\} = \Delta(x - y) - \Delta(y - x), \tag{4.76}
\end{aligned}$$

donde se ha usado $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Ahora, si $(x - y)^2 < 0$ podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x - y) = (0, \mathbf{r})$ y entonces $(y - x) = (0, -\mathbf{r})$, y como hemos visto que para puntos separados un intervalo espacial $\Delta(x - y)$ solamente depende del módulo de \mathbf{r} (4.75) tenemos que $\Delta(x - y) = \Delta(y - x)$ y

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{si } (x - y)^2 < 0, \tag{4.77}$$

como queríamos demostrar.^d En este punto es conveniente hacer varios comentarios importantes.

Para un campo escalar complejo el propagador se define como

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.78)$$

que expresa la amplitud de probabilidad de que una *partícula* que se crea en y se propague libremente hasta x donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 > 0$, o bien la amplitud de probabilidad de que una *antipartícula* que se crea en x se propague libremente hasta y donde es aniquilada, si $x^0 - y^0 < 0$.

Recordemos que si el campo es real, partícula y antipartícula coinciden.

Para entender mejor el significado de las dos contribuciones al propagador de Feynman (4.58) que se cancelan en (4.76) cuando $(x - y)^2 < 0$, hallemos el conmutador análogo para campos escalares complejos,

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} \left[\left(a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx} \right), \left(b_q e^{-iqy} + a_q^\dagger e^{iqy} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_q}} \left\{ e^{-i(px-ky)} [a_p, a_q^\dagger] + e^{i(px-ky)} [b_p^\dagger, b_q] \right\} \\
&= \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \Delta(x-y) - \Delta(y-x) \quad (4.79)
\end{aligned}$$

^d Si $(x-y)^2 > 0$ (*intervalo temporal*) podemos elegir un sistema de referencia en el que $(x-y) = (t, 0)$ y entonces

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_p t}}{2E_p} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{-i\sqrt{p^2+m^2} t}}{2\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2-m^2} e^{-iEt} \sim e^{-imt} \quad (t \rightarrow \infty)$$

así que $\Delta(x-y) - \Delta(y-x) \neq 0$ en este caso.

donde *vemos* que $\Delta(x - y)$ es la amplitud de probabilidad de que una partícula creada en y se propague hasta x mientras que $\Delta(y - x)$ es la amplitud de probabilidad de que una antipartícula creada en x se propague hasta y . Si no existieran las antipartículas se violaría el principio de causalidad! pues ambas contribuciones son necesarias y gracias a que tienen valores idénticos el conmutador (4.76) (o el (4.79) si el campo escalar es complejo) puede anularse fuera del cono de luz impidiendo correlaciones entre observaciones no conectadas causalmente.

Finalmente, nótese que en lo anterior ha sido fundamental que los campos escalares satisfacen relaciones de conmutación y no de anticonmutación, pues de lo contrario el principio de causalidad no se habría preservado. Puede verse que los campos fermiónicos han de anticonmutar por la misma razón. Se pone de manifiesto entonces la estrecha conexión entre el teorema espín-estadística y la causalidad a nivel cuántico.

el propagador de Feynman para fermiones
es

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle$$

que puede escribirse, usando las relaciones de completitud o

$$S_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s u_p^{(s)} \bar{u}_p^{(s)} e^{-ip(x-y)} \\ - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s v_p^{(s)} \bar{v}_p^{(s)} e^{ip(x-y)}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} - m) e^{ip(x-y)} \\
&= \theta(x^0 - y^0) (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) (-i\not{\partial}_x - m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-y)} \\
&= (i\not{\partial}_x + m) D_F(x - y) \\
&= (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} . \tag{4.137}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \tag{4.138}$$

y, en el espacio de momentos,

$$\tilde{S}_F(p) = \int d^4x S_F(x-y) e^{ip(x-y)} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (4.139)$$

donde hemos usado que $\not{p}\not{p} = p^2$. Vemos que el propagador de fermiones es una función de Green del operador de Dirac pues

$$(i\not{\partial}_x - m)S_F(x-y) = -(\square_x + m^2)D_F(x-y) = i\delta^4(x-y). \quad (4.140)$$

Es *muy importante* notar que $\tilde{S}_F(p) \neq \tilde{S}_F(-p)$, así que hay que tener cuidado con el signo del momento.