La matriz S

En el tema anterior hemos cuantizado campos libres. Ahora supondremos interacción entre los campos,

$$H = H_0 + H_{\text{int}}\,, \quad H_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \tag{4.1}$$

(si $\mathcal{L}_{\text{int}}$ no contiene derivadas de campos).

Por ejemplo, en QED, $\mathcal{L}_{\text{int}} = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ y en la teoría $\lambda\phi^4$, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Supondremos siempre que la constante de acoplamiento es pequeña, lo que significa que podremos tratar la interacción perturbativamente. (En realidad el parámetro relevante para el desarrollo perturbativo en QED es $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137 \ll 1$.)

Nuestro objetivo es hallar la probabilidad de transición entre un estado inicial y otro final en un proceso de colisión o *scattering*. En el picture *de Schrödinger* los estados dependen del tiempo. Sea $|a(t)\rangle$ la evolución en un tiempo t de $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$, que en un instante inicial t_i es autoestado de un conjunto de observables compatibles cuyos autovalores a sirven para etiquetarlo (e.g. momentos y espines de las partículas incidentes). Sea $|b\rangle$ el estado que en un instante de tiempo t_f, tras la colisión, será autoestado con autovalores b, $|b\rangle \equiv \left|b(t_f)\right\rangle$. La amplitud de probabilidad de que $|a\rangle$ evolucione hasta $|b\rangle$ es entonces

$$\left\langle b\middle|a(t_f)\right\rangle = \langle b|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_f-t_i)}\, |a\rangle \ . \tag{4.2}$$

Se llama *matriz S* al operador evolución $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_f-t_i)}$ en el límite $(t_f - t_i) \to \infty$, donde H es el hamiltoniano de la teoría de campos. La *amplitud de scattering* viene dada por

$$\langle b|\, S\, |a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\to\infty} \langle b|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_f-t_i)}\, |a\rangle \ . \tag{4.3}$$

Nótese que si $\langle a|a\rangle = 1$ y $|n\rangle$ es una base completa de estados, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$, tenemos

$$1 = \sum_n |\, \langle n|\, S\, |a\rangle\, |^2 = \sum_n \langle a|\, S^\dagger\, |n\rangle\langle n|\, S\, |a\rangle = \langle a|\, S^\dagger S\, |a\rangle \ , \tag{4.4}$$

lo que significa que $S^\dagger S = 1$, es decir, S es unitaria. Por tanto, la unitariedad de S expresa la conservación de la probabilidad. Conviene escribir

$$\begin{array}{l} S \equiv 1 + \mathrm{i}T \\ S^\dagger S = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T \ . \tag{4.5}$$

Entonces, definiendo $T_{ba} = \langle b| T |a\rangle$ tenemos que

$$-\mathrm{i}(T_{ba} - T^*_{ab}) = \sum_n T^*_{bn} T_{an} \quad \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{Im} T_{aa} = \sum_n |T_{an}|^2 \tag{4.6}$$

En *el picture de Heisenberg* son los operadores y no los estados los que dependen del tiempo, lo cual es más apropiado para la TQC en la que los campos son operadores $\phi(t, \boldsymbol{x})$. Los estados $|a\rangle \equiv |a(t_i)\rangle$ y $|b\rangle \equiv \left|b(t_f)\right\rangle$ son en *el picture* de Heisenberg $|a\rangle_H = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} |a(t)\rangle$ y $|b\rangle_H = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} |b(t)\rangle$, independientes del tiempo. Por tanto, definiendo los estados en *el picture* de Heisenberg $|a; t_i\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht_i} |a\rangle$ y $\left|b; t_f\right\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht_f} |b\rangle$, la matriz S será

$$\langle b| S |a\rangle = \lim_{(t_f - t_i)\to\infty} \langle b| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_f - t_i)} |a\rangle = \lim_{(t_f - t_i)\to\infty} \left\langle b; t_f \middle| a; t_i \right\rangle \ . \tag{4.7}$$

La fórmula de reducción de LSZ

Vamos a ver que la matriz S entre estados iniciales y finales de la misma especie etiquetados por sus momentos (supongamos por simplicidad que no tienen índices de espín),

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n | \, S \, | \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \cdots \boldsymbol{k}_m \rangle = \left\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n ; t_f \middle| \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \cdots \boldsymbol{k}_m ; t_i \right\rangle \ , \tag{4.8}$$

donde se sobreentiende que $t_i \to -\infty$ y $t_f \to +\infty$, puede expresarse en función de valores esperados en el vacío de productos de campos *ordenados temporalmente* (que enseguida definiremos). Para ello, notemos en primer lugar que si tenemos un campo escalar real *libre*,

$$\phi_{\text{free}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} (a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}) \tag{4.9}$$

entonces

$$\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}} \, a_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \overleftrightarrow{\partial_0} \, \phi_{\text{free}}(x) \ , \quad \sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}} \, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \overleftrightarrow{\partial_0} \, \phi_{\text{free}}(x) \ . \tag{4.10}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\ \phi_{\text{free}}(x) &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right) \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(-\mathrm{i}a_{\boldsymbol{p}}(E_{\boldsymbol{p}} + E_{\boldsymbol{k}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-p)x} + \mathrm{i}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}(E_{\boldsymbol{p}} - E_{\boldsymbol{k}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+p)x} \right) \\
&= \sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}\ a_{\boldsymbol{k}}\ . \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Esperamos que

$$\phi(x) \xrightarrow[t\to-\infty]{} Z^{1/2}\phi_{\text{in}}(x)\ , \quad \phi(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} Z^{1/2}\phi_{\text{out}}(x)\ , \qquad (4.12)$$

donde $\phi_{\text{in}}(x)$ y $\phi_{\text{out}}(x)$ son *campos libres* (antes y después de la interacción, respectivamente) y Z es un factor denominado *renormalización de la función de onda*. Por tanto, usando (4.10),

$$\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}\ a^{\dagger(\text{in})}_{\boldsymbol{k}} = -\mathrm{i}Z^{-1/2} \lim_{t\to-\infty} \int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\ \phi(x)\ , \qquad (4.13)$$

$$\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}\ a^{\dagger(\text{out})}_{\boldsymbol{k}} = -\mathrm{i}Z^{-1/2} \lim_{t\to+\infty} \int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\ \phi(x)\ . \qquad (4.14)$$

Así que

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\middle|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle &= \sqrt{2E_{\boldsymbol{k}_1}}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right| a^{\dagger(\mathrm{in})}_{\boldsymbol{k}_1}\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle \\ &= -\mathrm{i}Z^{-1/2}\lim_{t\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0\,\phi(x)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\ . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Conviene escribir esta expresión en forma covariante notando que

$$\begin{aligned}&\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}_1}}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right| a^{\dagger(\mathrm{in})}_{\boldsymbol{k}_1}\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle \\ =&\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}_1}}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|\left(a^{\dagger(\mathrm{in})}_{\boldsymbol{k}_1}-a^{\dagger(\mathrm{out})}_{\boldsymbol{k}_1}\right)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\end{aligned} \tag{4.16}$$

pues $a^{\dagger(\mathrm{out})}_{\boldsymbol{k}_1}$ actúa sobre $\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|$ destruyendo una partícula en el estado final de momento $\boldsymbol{k}_1$ y como supondremos que en el proceso de *scattering* no hay partículas que se comporten como meros espectadores (ningún $\boldsymbol{k}_i$ coincide con un $\boldsymbol{p}_j$) esta operación da cero. Es decir, en realidad estamos calculando la parte iT de la matriz S. Y, por otro lado, a partir de (4.13) y (4.14),

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2E_{\boldsymbol{k}}}\left(a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger(\mathrm{in})}-a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger(\mathrm{out})}\right) &= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\partial_0\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\phi\right)\\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\partial_0\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\partial_0\phi-\phi\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)\\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\partial_0^2\phi+\cancel{(\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\partial_0\phi}-\cancel{\partial_0\phi\partial_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}-\phi\partial_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\partial_0^2\phi-\phi(\nabla^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\left(\partial_0^2\phi-\nabla^2\phi+m^2\phi\right)\\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(\Box+m^2)\phi(x)\;, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

donde en la primera igualdad se ha usado que

$$
\left(\lim_{t\to-\infty}-\lim_{t\to+\infty}\right)\int \mathrm{d}^3x\;f(t,\boldsymbol{x})=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\;\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x\;f(t,\boldsymbol{x})=-\int \mathrm{d}^4x\;\partial_t f(t,\boldsymbol{x})\;, \quad (4.18)
$$

con $f(t,\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}Z^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi$; en la antepenúltima se ha sustituido

$$\phi\partial_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \phi(\nabla^2 - m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \; , \tag{4.19}$$

ya que $k^2 = m^2$; y en la penúltima se ha usado que

$$\int \mathrm{d}^3x \; \nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3x \; (\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\nabla\phi = -\int \mathrm{d}^3x \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla^2\phi \tag{4.20}$$

de donde

$$\begin{aligned}
0 = \int \mathrm{d}^3x \; \nabla^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\phi) &= \int \mathrm{d}^3x \; \nabla\left[(\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla\phi\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x \; \left[(\nabla^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\phi + 2(\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\nabla\phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla^2\phi\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x \; \left[(\nabla^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\phi - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla^2\phi\right] \\
&\Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3x \; \phi\nabla^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \int \mathrm{d}^3x \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\nabla^2\phi \; .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por tanto, podemos en efecto escribir (4.15) en forma covariante,

$$\begin{aligned}&\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\middle|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\\&\qquad= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}(\Box+m^2)\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|\phi(x)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\ . \qquad (4.22)\end{aligned}$$

Se trata ahora de iterar el procedimiento hasta eliminar todas las partículas de los estados inicial y final, dejando solamente combinaciones de campos actuando sobre el vacío. Para ello, escribamos ahora

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|\phi(x)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_n;t_i\right\rangle &= \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\left\langle \boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|a^{(\text{out})}_{\boldsymbol{p}_1}\phi(x)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\\&= \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\left\langle \boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|T\{(a^{(\text{out})}_{\boldsymbol{p}_1}-a^{(\text{in})}_{\boldsymbol{p}_1})\phi(x)\}\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle \qquad (4.23)\end{aligned}$$

donde hemos usado que $a^{(\text{in})}_{\boldsymbol{p}_1}\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle=0$ y hemos tenido que introducir el *producto ordenado temporal*,

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases}\phi(y)\phi(x)\ , & y^0>x^0\\ \phi(x)\phi(y)\ , & y^0<x^0\end{cases} \qquad (4.24)$$

que implica

$$T\{a^{(\text{in})}_{\boldsymbol{p}}\phi(x)\}=\phi(x)a^{(\text{in})}_{\boldsymbol{p}}\ ,\quad T\{a^{(\text{out})}_{\boldsymbol{p}}\phi(x)\}=a^{(\text{out})}_{\boldsymbol{p}}\phi(x)\ . \qquad (4.25)$$

A partir de (4.17) tenemos

$$\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}(a_{\boldsymbol{p}}^{(\text{out})} - a_{\boldsymbol{p}}^{(\text{in})}) = \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}py}(\Box_y + m^2)\phi(y) \tag{4.26}$$

y sustituyendo en (4.23) llegamos a

$$\begin{aligned}&\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right|\phi(x)\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\\ &\qquad = \mathrm{i}Z^{-1/2}\int \mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1y}(\Box_y + m^2)\left\langle \boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\right| T\{\phi(y)\phi(x)\}\left|\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\ .\end{aligned} \tag{4.27}$$

De donde ya es directo deducir

$$\begin{aligned}&\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n;t_f\middle|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m;t_i\right\rangle\\ &\qquad = \left(\mathrm{i}Z^{-1/2}\right)^{m+n}\int\left(\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}^4x_i\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\mathrm{d}^4y_j\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_jy_j}\right)\\ &\qquad\quad \times(\Box_{x_1} + m^2)\cdots(\Box_{y_n} + m^2)\left\langle 0\right| T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_m)\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)\}\left|0\right\rangle\ .\end{aligned} \tag{4.28}$$

Si definimos ahora la *función de Green de N puntos*,

$$G(x_1,\ldots,x_N) = \langle 0|\, T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\}\,|0\rangle \ \ , \tag{4.29}$$

y la escribimos en términos de su transformada de Fourier $\widetilde{G}$,

$$G(x_1,\ldots,x_N) = \int \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^4\tilde{q}_i}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{q}_i x_i} \right) \widetilde{G}(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_N)\ , \tag{4.30}$$

vemos que (sustituyendo $\square \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}qx} = -q^2 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}qx}$)

$$\begin{aligned}
&\left\langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n; t_f \middle| \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m; t_i \right\rangle \\
&\quad = \left(-\mathrm{i}Z^{-1/2}\right)^{m+n} \int \left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}^4x_i \frac{\mathrm{d}^4\tilde{k}_i}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\tilde{k}_i+k_i)x_i} (\tilde{k}_i^2 - m^2) \right) \\
&\qquad \times \int \left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}^4y_j \frac{\mathrm{d}^4\tilde{p}_j}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\tilde{p}_j-p_j)y_j} (\tilde{p}_j^2 - m^2) \right) \widetilde{G}(\tilde{k}_1,\ldots,\tilde{k}_m,\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_n) \\
&\quad = \left(-\mathrm{i}Z^{-1/2}\right)^{m+n} \left(\prod_{i=1}^{m} (k_i^2 - m^2) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^2 - m^2) \right) \widetilde{G}(-k_1,\ldots,-k_m,p_1,\ldots,p_n)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

y despejando $\widetilde{G}(-k_1, \ldots, -k_m, p_1, \ldots, p_n)$,

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2}\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{i}\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2}\right) \langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n | \, \mathrm{i}T \, | \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \cdots \boldsymbol{k}_m \rangle \\ &\quad = \int \left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}^4 x_i \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k_i x_i}\right) \int \left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}^4 y_j \; \mathrm{e}^{+\mathrm{i} p_j y_j}\right) \langle 0 | \, T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_m) \phi(y_1) \cdots \phi(y_n)\} \, | 0 \rangle\end{aligned}} \tag{4.32}$$

Ésta es la *fórmula de reducción de LSZ* (Lehmann-Symanzik-Zimmermann). Recuérdese que para una *partícula física* se cumple la relación $p^2 - m^2 = 0$ (se dice que está *on-shell* o sobre su capa de masas). Por tanto, el miembro de la derecha de la fórmula LSZ tendrá polos cuando las partículas entrantes o salientes estén *on-shell*, pero (como veremos y es de esperar) se cancelarán con los polos del prefactor del elemento de matriz S de la izquierda, de modo que la matriz S tiene un valor finito.