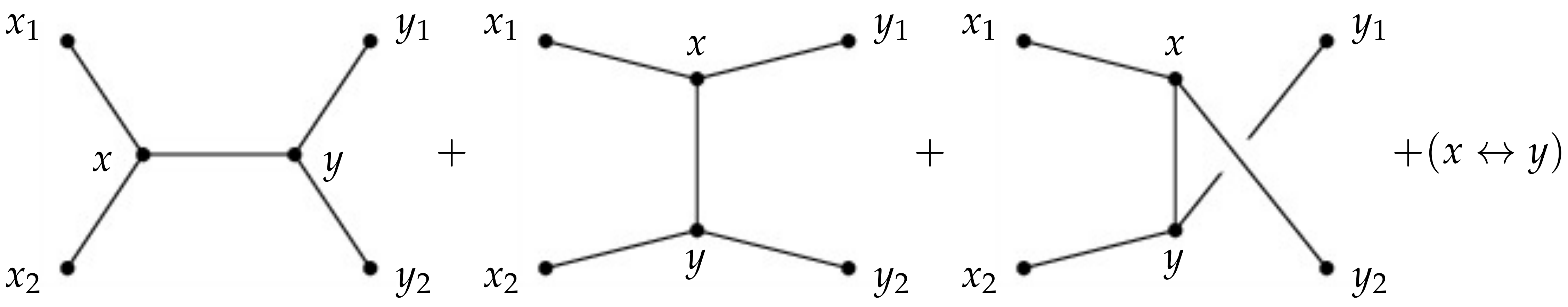
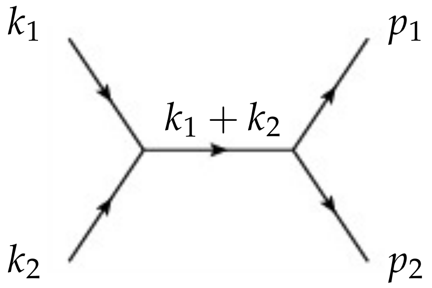
Para ilustrar el caso de diagramas con *líneas internas*, vamos a suponer que nuestro proceso $2 \to 2$ se debe a una interacción distinta, $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x)$. Si buscamos los diagramas conexos a orden más bajo que den una contribución no nula encontramos que la primera contribución es a $\mathcal{O}(\lambda^2)$ y viene dada por los siguientes diagramas:

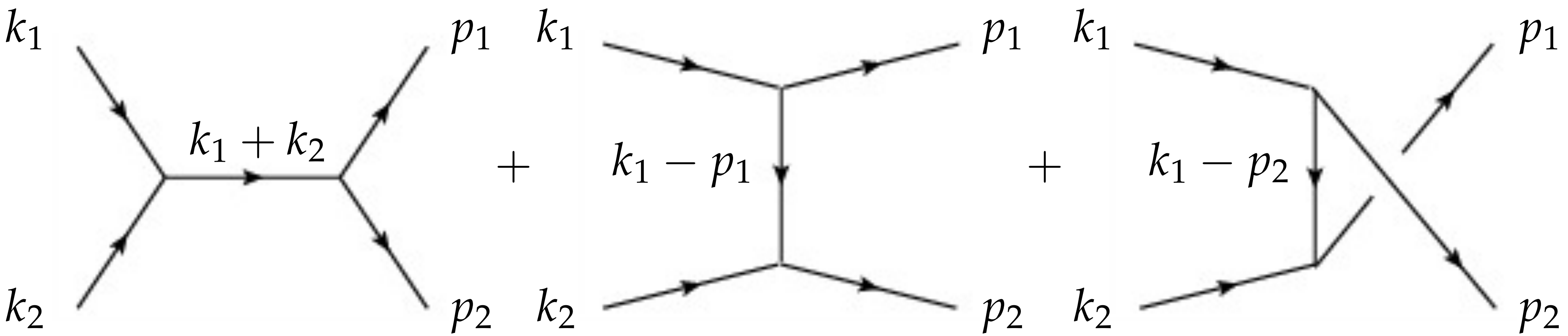


Calculemos en detalle la contribución del primero (se incluye la suma del mismo intercambiando x e y) que representaremos mediante el correspondiente diagrama



$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 \mathrm{d}^4y_1 \mathrm{d}^4y_2 \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1x_1+p_2x_2-k_1y_1-k_2y_2)} \\
&\quad \times \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{3!}\right)^2 (3!)^2 2 \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \; \underbrace{D_F(x_1-x)D_F(x_2-x)D_F(x-y)D_F(y-y_1)D_F(y-y_2)}_{:\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y):} \\
&= (-\mathrm{i}\lambda)^2 \int \mathrm{d}^4\tilde{x}_1 \mathrm{d}^4\tilde{x}_2 \mathrm{d}^4\tilde{y}_1 \mathrm{d}^4\tilde{y}_2 \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)x-\mathrm{i}(k_1+k_2)y+\mathrm{i}(p_1\tilde{x}_1+p_2\tilde{x}_2-k_1\tilde{y}_1-k_2\tilde{y}_2)} \\
&\qquad\qquad \times D_F(\tilde{x}_1)D_F(\tilde{x}_2)D_F(\tilde{y}_1)D_F(\tilde{y}_2)D_F(x-y) \\
&= (-\mathrm{i}\lambda)^2 \widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\widetilde{D}_F(k_1)\widetilde{D}_F(k_2) \int \mathrm{d}^4\tilde{x}\mathrm{d}^4y \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\tilde{x}+\mathrm{i}(p_1+p_2-k_1-k_2)y} D_F(\tilde{x}) \\
&= (-\mathrm{i}\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2) \widetilde{D}_F(k_1+k_2)\widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\widetilde{D}_F(k_1)\widetilde{D}_F(k_2)
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

donde el factor $(3!)^2$ proviene de todas las contracciones de Wick equivalentes a la dada y el factor 2 del intercambio de x con y. También se ha hecho el cambio de variables $\tilde{x}_i = x_i - x$, $\tilde{y}_i = y_i - y$ y posteriormente $\tilde{x} = x - y$. Anteriormente hemos obtenido un factor $(-\mathrm{i}\lambda)$ por cada vértice, un factor $(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ que expresa la conservación del cuadrimomento y el producto de los cuatro propagadores de las patas externas que se cancelarán al despejar la amplitud de *scattering* de la fórmula LSZ. Vemos que además hay que introducir el *propagador de cada línea interna*. Nótese finalmente que el factor 3! en el denominador de la constante de acoplamiento se ha cancelado al sumar todas las contracciones de Wick equivalentes. Por tanto, sumando los tres diagramas en el espacio de momentos



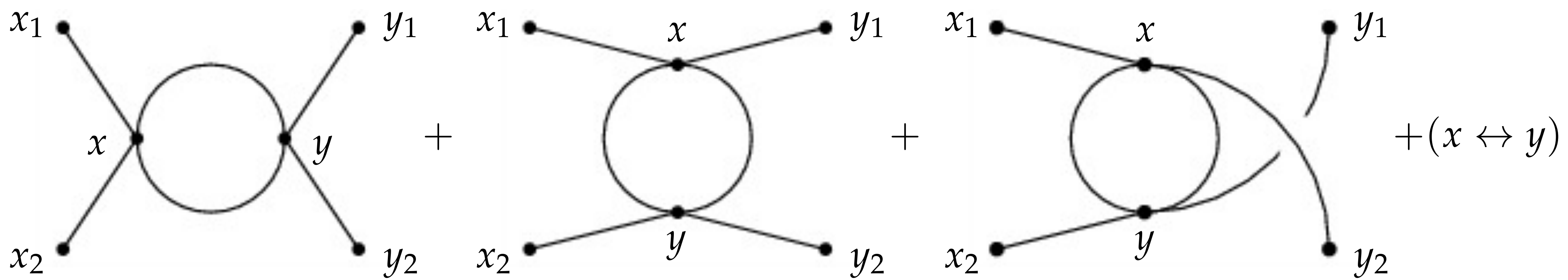
(4.107)

obtenemos

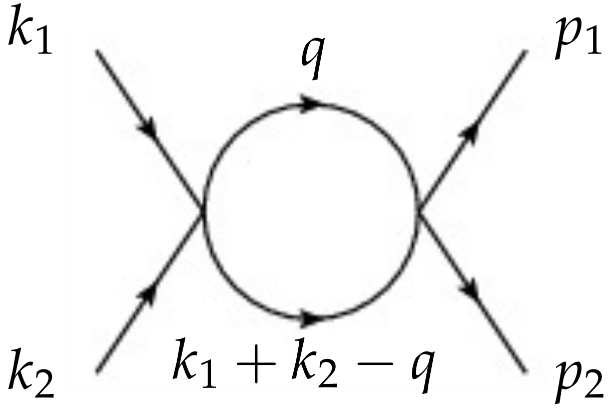
$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3 : \qquad \langle \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2|\, \mathrm{i}T\, |\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\rangle = (-\mathrm{i}\lambda)^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2) \\ \times [\widetilde{D}_F(k_1+k_2) + \widetilde{D}_F(k_1-p_1) + \widetilde{D}_F(k_1-p_2)] + \mathcal{O}(\lambda^4)\ . \tag{4.108}$$

Nótese que las integrales sobre las coordenadas de los puntos de interacción implican la *conservación del cuadrimomento en cada vértice*.

Veamos ahora qué ocurre cuando hay *loops* en los diagramas. Volvamos a la teoría $\lambda\phi^4$. Para hallar la contribución de $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a la amplitud $2\to 2$ necesitamos calcular los siguientes diagramas conexos:



En todos aparece un *loop* formado por dos líneas internas que comparten punto inicial y final.[e] Miremos con detalle la contribución del primero de estos diagramas (incluyendo la suma del mismo intercambiando x e y) que representaremos mediante el siguiente diagrama de Feynman en el espacio de momentos:



$$= \int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 \mathrm{d}^4y_1 \mathrm{d}^4y_2 \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2)}$$

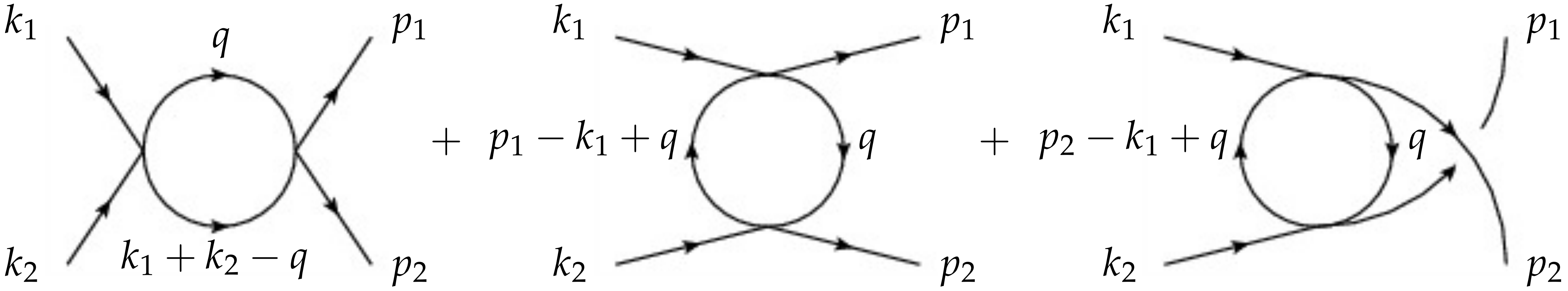
$$\times \frac{1}{2!}\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda}{4!}\right)^2 \times (4\times 3)^2 \times 2 \times 2 \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \; \underbrace{D_F(x_1 - x)D_F(x_2 - x)D_F^2(x-y)D_F(y-y_1)D_F(y-y_2)}_{:\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y):}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)^2 \int \mathrm{d}^4\tilde{x}_1 \mathrm{d}^4\tilde{x}_2 \mathrm{d}^4\tilde{y}_1 \mathrm{d}^4\tilde{y}_2 \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)x-\mathrm{i}(k_1+k_2)y+\mathrm{i}(p_1\tilde{x}_1+p_2\tilde{x}_2-k_1\tilde{y}_1-k_2\tilde{y}_2)} \\
&\qquad\qquad \times D_F(\tilde{x}_1)D_F(\tilde{x}_2)D_F(\tilde{y}_1)D_F(\tilde{y}_2)D_F^2(x-y) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)^2 \widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\widetilde{D}_F(k_1)\widetilde{D}_F(k_2) \int \mathrm{d}^4\tilde{x}\mathrm{d}^4y \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)\tilde{x}+\mathrm{i}(p_1+p_2-k_1-k_2)y} D_F^2(\tilde{x}) \\
&= \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)^2 (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2)\widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\widetilde{D}_F(k_1)\widetilde{D}_F(k_2) \\
&\qquad\qquad \times \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \widetilde{D}_F(q)\widetilde{D}_F(k_1+k_2-q)
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

donde hemos sustituido

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4\tilde{x} \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)\tilde{x}} D_F^2(\tilde{x}) &= \int \mathrm{d}^4\tilde{x} \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)\tilde{x}} D_F(\tilde{x}) \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\tilde{x}} \widetilde{D}_F(q) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \; \widetilde{D}_F(k_1+k_2-q)\widetilde{D}_F(q) \; .
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

Vemos que, además del habitual factor $(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2)$ de la conservación del cuadrimomento, el factor $(-\mathrm{i}\lambda)$ por cada vértice y el propagador de cada línea interna, aparece una integral sobre el cuadrimomento del loop dividida por $(2\pi)^4$. Obtenemos asimismo un *factor de simetría* $\frac{1}{2}$ procedente del recuento de factores $1/4!$ y contracciones de Wick equivalentes (estos factores de simetría son frecuentemente una fuente de errores en el cálculo). También aparecen los propagadores de cada pata externa en el espacio de momentos cuyos polos se cancelarán al despejar la amplitud de la fórmula LSZ. Repitiendo el procedimiento para los tres diagramas en el espacio de momentos:



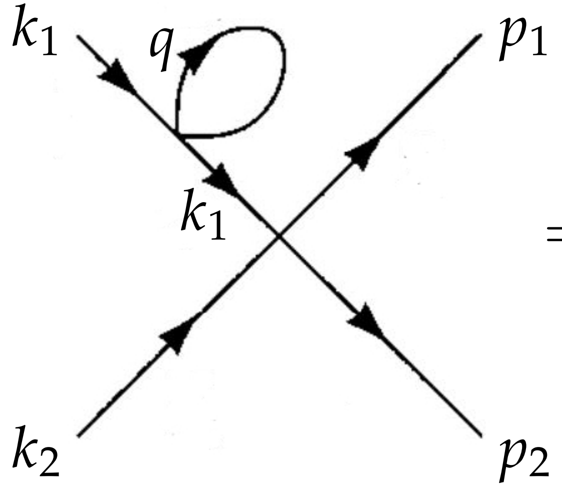
[e]Un *loop* también puede provenir de una línea interna que empieza y acaba en el mismo punto. Véase e.g. el diagrama de (4.112).

obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4 : \\
&\quad \langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 |\, \mathrm{i}T \,| \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\
&\qquad\qquad \times \Bigg\{ -\mathrm{i}\lambda + \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \big[\widetilde{D}_F(q)\widetilde{D}_F(k_1 + k_2 - q) \\
&\qquad\qquad\qquad + \widetilde{D}_F(q)\widetilde{D}_F(k_1 - p_1 - q) \\
&\qquad\qquad\qquad + \widetilde{D}_F(q)\widetilde{D}_F(k_1 - p_2 - q) \big] \Bigg\} + \mathcal{O}(\lambda^3) \ .
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

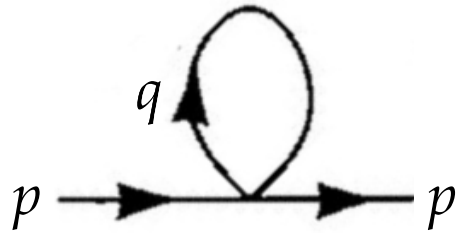
Si evaluamos las integrales del *loop* veremos que son *divergentes en el ultravioleta*, pues tienden a infinito cuando q se hace grande. Para dotar de sentido a esta corrección infinita a la predicción que habíamos obtenido a orden más bajo en TP tendremos que *renormalizar* la teoría.

Hasta ahora hemos ignorado los factores Z (renormalización de la función de onda) que aparecen en la fórmula LSZ. También hemos ignorado diagramas en los que el *propagador de alguna de las patas externas* sufre una corrección como, por ejemplo:



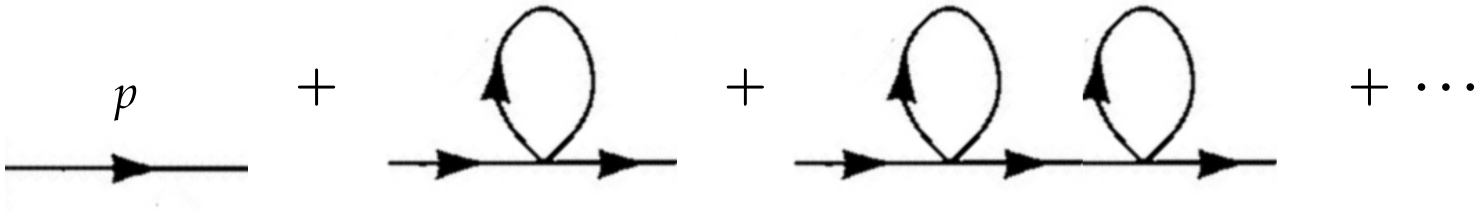
$$= (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)(-\mathrm{i}\lambda)\widetilde{D}_F(k_2)\widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2) \\ \times\widetilde{D}_F(k_1)\times\frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2}\times\widetilde{D}_F(k_1) \tag{4.112}$$

que, aparte de la corrección debida al *loop* (que resulta ser divergente en el ultravioleta), tiene un polo doble en $\widetilde{D}_F(k_1)$ que no se cancela con el correspondiente polo simple de la fórmula LSZ, y por tanto nos da infinito. Nótese que la corrección a la pata externa factoriza y se puede leer directamente del siguiente diagrama

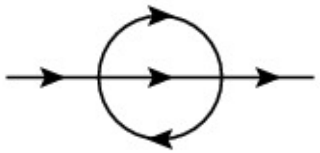


$$= \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p)\ , \quad -\mathrm{i}B = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda)\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-m^2}\ . \tag{4.113}$$

Podemos resumar todas las correcciones de este tipo al propagador,

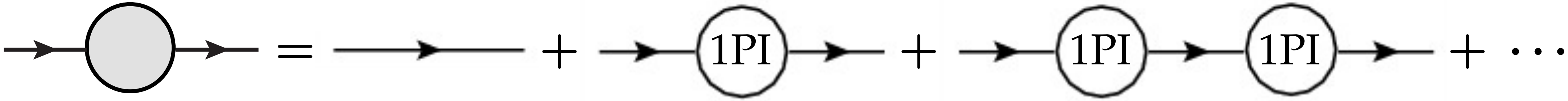


$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{D}_F(p) + \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) + \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) + \ldots \\
&= \widetilde{D}_F(p)\left[1 + (-\mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p)) + (-\mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p))^2 + \ldots\right] \\
&= \widetilde{D}_F(p)\frac{1}{1+\mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p)} = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2}\left(\frac{1}{1-\frac{B}{p^2-m^2}}\right) = \frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2-B} \,. \qquad (4.114)
\end{aligned}
$$

Vemos que el efecto neto de este tipo de correcciones consiste en desplazar la masa de m^2 a $m^2 + B$. Podemos añadir también otras correcciones, como por ejemplo la corrección de $\mathcal{O}(\lambda^2)$  (que, a diferencia de la anterior, depende de p^2) y todas las demás. Para ello, sumamos todos los diagramas con dos patas externas que sean *one-particle irreducible* (aquellos diagramas que no se separan en dos si cortamos sólo una línea interna) y llamamos $-\mathrm{i}M^2(p^2)$ a la contribución de todos los diagramas 1PI (eliminando los propagadores externos),

$$
= -\mathrm{i}M^2(p^2) \,. \qquad (4.115)
$$

Ahora podemos resumar *todas* las correcciones al propagador por el mismo procedimiento de antes. Llamemos m_0 al parámetro de masa que hemos introducido en el lagrangiano. Entonces el propagador completo (a todo orden en TP) es



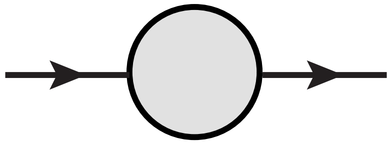
$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2} + \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2}[-\mathrm{i}M^2(p^2)]\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2} + \dots \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2}\left[1 + \frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2} + \left(\frac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2}\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2}\frac{1}{1 - \dfrac{M^2(p^2)}{p^2 - m_0^2}} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}\ .
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

La masa física m se define como el polo del propagador completo,

$$p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)\big|_{p^2=m^2} = 0 \; . \tag{4.117}$$

Desarrollando en serie alrededor de $p^2 = m^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} p^2 - m_0^2 - M^2(p^2) &= p^2 - m_0^2 - M^2(m^2) - \left.\frac{\mathrm{d}M^2}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots \\ &= (p^2 - m^2)\left(1 - \left.\frac{\mathrm{d}M^2}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}\right) \quad (\text{cerca de } p^2 = m^2) \; . \end{aligned} \tag{4.118}$$

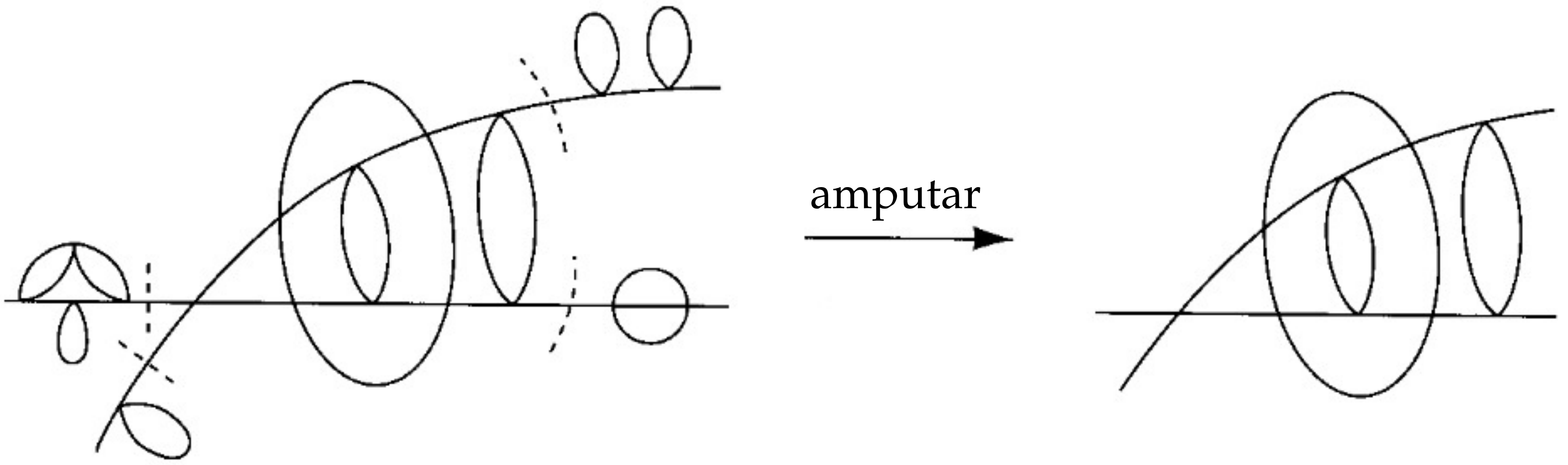


$$= \frac{\mathrm{i}Z}{p^2 - m^2} + \text{regular cerca de } p^2 = m^2 \tag{4.119}$$

$$m^2 = m_0^2 + M^2(m^2) \; , \quad Z = \left(1 - \left.\frac{\mathrm{d}M^2}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p^2=m^2}\right)^{-1} \; . \tag{4.120}$$

Vemos en particular que la primera corrección a $Z = 1$ es de orden λ^2, como habíamos anticipado, pues la corrección de orden λ al propagador (4.113) no depende de p^2.

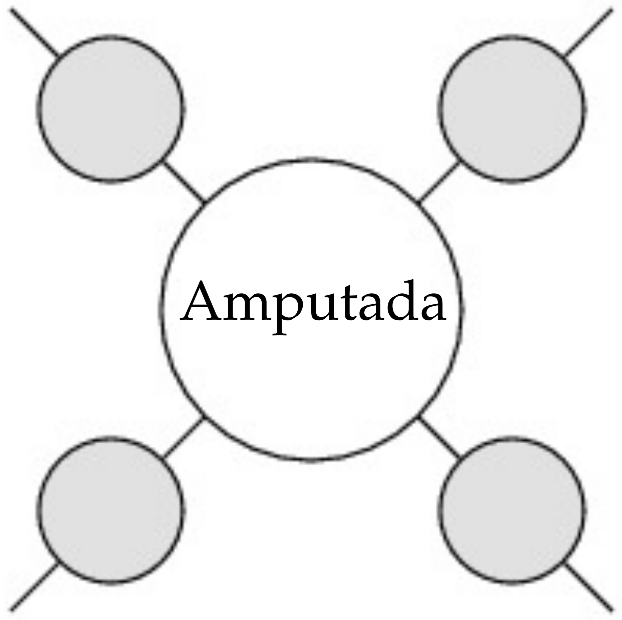
En vista de lo que sucede con las correcciones a las patas externas, conviene definir *diagramas amputados* como aquéllos en los que quitamos todos los subdiagramas asociados a las patas externas que se pueden separar cortando sólo una línea. Es decir, eliminamos el propagador completo de cada pata externa. Por ejemplo,



Entonces la función de cuatro puntos de *campos interactuantes*

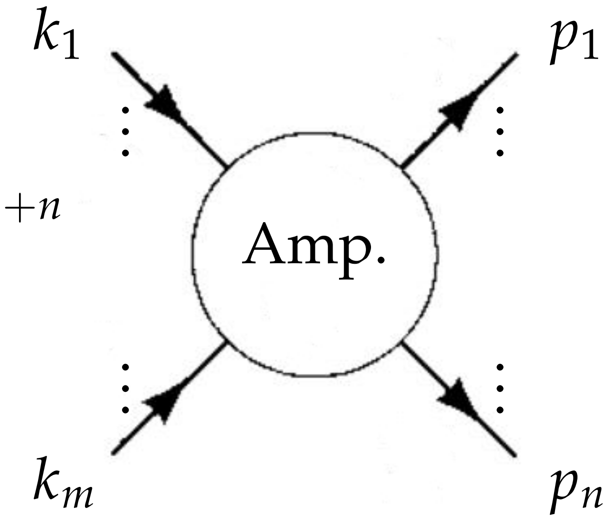
$$\int \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}^4 x_i \prod_{j=1}^{2} \mathrm{d}^4 y_j \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sum_i p_i x_i - \sum_j k_j y_j)} \langle 0 | \, T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\} \, |0\rangle_c \tag{4.121}$$

tiene la forma diagramática siguiente



Y en general, usando (4.119) podemos reescribir la fórmula LSZ (4.32) como

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \dots \boldsymbol{p}_n | \, \mathrm{i}T \, | \boldsymbol{k}_1 \dots \boldsymbol{k}_m \rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^{m+n} \tag{4.122}$$



Con esto ya podemos dar las reglas de Feynman para campos escalares reales en el espacio de momentos. Consideremos que la interacción de los campos es de la forma $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{N!}\phi^N$. Entonces para calcular la amplitud del proceso de *scattering* de $m \to n$ partículas:

1. Dibujar todos los diagramas conexos amputados con m patas entrantes y n salientes unidos en vértices de N patas.

2. Imponer conservación del cuadrimomento en cada vértice.

3. Asociar un factor $(-\mathrm{i}\lambda)$ a cada vértice.

4. Asociar a cada línea interna de momento p un factor $\widetilde{D}_F(p) = \dfrac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$.

5. Integrar sobre los cuadrimomentos q no fijados por conservación del cuadrimomento (uno por cada *loop*) con medida $\dfrac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}$.

6. Multiplicar por el factor de simetría correspondiente.

7. La suma de las contribuciones de todos los diagramas de Feynman conduce a la llamada *amplitud invariante* $\mathrm{i}\mathcal{M}(\boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_m \to \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ que se relaciona con el elemento de matriz $S = 1 + \mathrm{i}T$ mediante

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n | \, \mathrm{i}T \, | \boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i p_i - \sum_j k_j \right) \mathrm{i}\mathcal{M} \; , \tag{4.123}$$

donde $\mathrm{i}\mathcal{M}$ incluye los factores $\left(\sqrt{Z}\right)^{m+n}$, que son irrelevantes en cálculos a orden más bajo en teoría de perturbaciones, pero son importantes para hallar correcciones de orden superior.

Comentario sobre la virtualidad de los estados intermedios

Consideremos un diagrama con líneas internas, como por ejemplo (4.106). La fórmula LSZ exige que pongamos las partículas entrantes y salientes sobre su capa de masas,

$$k_1^2 = k_2^2 = p_1^2 = p_2^2 = m^2 \tag{4.124}$$

y además impone conservación del cuadrimomento en los vértices, lo que significa que la partícula intermedia que se propaga entre dos vértices estará *off-shell*,

$$p_{\text{interm}}^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(k_1 k_2) = 2(m^2 + k_1 k_2)\ . \tag{4.125}$$

Si elegimos, por ejemplo, el sistema de referencia centro de masas de las dos partículas entrantes,

$$\begin{aligned} k_1 = (E, 0, 0, k)\ , \quad k_2 = (E, 0, 0, -k) \quad &\Rightarrow \quad k_1 k_2 = E^2 + k^2 = m^2 + 2k^2 \\ &\Rightarrow \quad p_{\text{interm}}^2 = 4(m^2 + k^2) \neq m^2\ . \end{aligned} \tag{4.126}$$

Es fácil comprobar que el p_{interm}^2 de las líneas internas de los otros dos diagramas en (4.107) es incluso negativo. Así que en TQC los estados intermedios que se propagan entre vértices de interacción son *partículas virtuales*, i.e. están fuera de su capa de masas.