

## Reglas de Feynman para fermiones

Los campos fermiónicos aparecerán en los hamiltonianos de interacción por parejas y formando parte de bilineales covariantes. Los campos fermiónicos satisfacen relaciones de anticonmutación que nos han obligado a definir el orden normal para operadores de fermiones de forma consistente

$$: a_{p,r} a_{q,s} a_{k,t}^\dagger : = (-1)^2 a_{k,t}^\dagger a_{p,r} a_{q,s} = (-1)^3 a_{k,t}^\dagger a_{q,s} a_{p,r} . \quad (4.127)$$

Del mismo modo, debemos definir de forma consistente el orden temporal de dos campos fermiónicos,

$$T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} = \begin{cases} \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) , & x_1^0 > x_2^0 \\ -\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) , & x_1^0 < x_2^0 \end{cases} \quad (4.128)$$

y análogamente para  $T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\}$  y  $T\{\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}$ . Así, por ejemplo, si  $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$  entonces

$$T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\psi(x_4)\} = -\psi(x_3)\psi(x_1)\psi(x_4)\psi(x_2) . \quad (4.129)$$

Veamos a hora cómo definir la contracción de Wick de dos campos fermiónicos, para obtener una expresión análoga a la de campos escalares,

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\psi(y)}. \quad (4.130)$$

Separando las componentes de energía positiva y negativa,

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s a_{p,s} u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-ipx}, & \psi^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s b_{p,s}^\dagger v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{ipx}, \\ \bar{\psi}^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s b_{p,s} \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-ipx}, & \bar{\psi}^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s a_{p,s}^\dagger \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p}) e^{ipx}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} &= \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x) \\
&= \theta(x^0 - y^0) \left[ \psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) \right] \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[ \bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) + \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) \right] \\
&= \theta(x^0 - y^0) \left[ : \psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} + : \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) : \right. \\
&\quad \left. + : \psi^-(x)\bar{\psi}^+(y) : + : \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) : \right] \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[ : \bar{\psi}^+(y)\psi^+(x) : + \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} + : \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) : \right. \\
&\quad \left. + : \bar{\psi}^-(y)\psi^+(x) : + : \bar{\psi}^-(y)\psi^-(x) : \right] \\
&= \theta(x^0 - y^0) \left[ : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \right] \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \left[ : \bar{\psi}(y)\psi(x) : + \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} \right] \\
&= : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \tag{4.132}
\end{aligned}$$

donde al final hemos usado que  $: \bar{\psi}(y)\psi(x) := - : \psi(x)\bar{\psi}(y) :$  y hemos definido

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \theta(x^0 - y^0)\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} - \theta(y^0 - x^0)\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} \tag{4.133}$$

Es fácil comprobar que, como  $\{a_{p,s}, b_{q,r}^\dagger\} = 0$ , las siguientes contracciones se anulan,

$$\overbrace{\psi(x)\psi(y)} = \overbrace{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0 . \quad (4.134)$$

Puede mostrarse que el teorema de Wick tiene la misma forma para campos fermiónicos. Hay que tener cuidado porque el orden normal de contracciones de Wick fermiónicas puede llevar aparejado un cambio de signo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \overbrace{:\psi_1\psi_2:} &= -\overbrace{\psi_2\psi_1} \\ \overbrace{:\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4:} &= -\overbrace{\psi_1\psi_3}\overbrace{\psi_2\psi_4} . \end{aligned} \quad (4.135)$$

Como el valor esperado en el vacío del orden normal de operadores es cero, tenemos que, análogamente al caso de campos escalares, el *propagador de Feynman para fermiones* es

$$\langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle = \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} = S_F(x - y) , \quad (4.136)$$

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (4.138)$$

Para hallar la matriz  $S$  entre estados fermiónicos necesitamos despejar los operadores creación y destrucción del campo libre  $\psi_{\text{free}}$ ,

$$\psi_{\text{free}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left[ a_{p,s} u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{p,s}^\dagger v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad (4.141)$$

lo que conduce a

$$\sqrt{2E_k} a_{k,r} = \int d^3 x \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) e^{ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \quad (4.142)$$

$$\sqrt{2E_k} b_{k,r}^\dagger = \int d^3 x \bar{v}^{(r)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \quad (4.143)$$

$$\sqrt{2E_k} a_{k,r}^\dagger = \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\mathbf{k}) \quad (4.144)$$

$$\sqrt{2E_k} b_{k,r} = \int d^3 x \bar{\psi}_{\text{free}}(x) \gamma^0 e^{ikx} v^{(r)}(\mathbf{k}) . \quad (4.145)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} \gamma^0 \psi_{\text{free}}(x) \\
&= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left[ a_{p,s} \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})x} + b_{p,s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p})x} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s \left[ a_{k,s} \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\mathbf{k}) + b_{k,s}^\dagger \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\mathbf{k}) \right] = \sqrt{2E_k} a_{k,r} \quad (4.146)
\end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 u^{(s)}(\mathbf{k}) = 2E_k \delta_{rs} , \quad \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) \gamma^0 v^{(s)}(-\mathbf{k}) = 0 \quad (4.147)$$

y lo mismo para los demás. Igual que para campos escalares, esperamos que

$$\psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{in}}(x) , \quad \psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} Z^{1/2} \psi_{\text{out}}(x) , \quad (4.148)$$

donde esta  $Z$  es la constante de renormalización del campo  $\psi$ . Entonces,

$$\sqrt{2E_k} a_{k,r}^{\dagger(\text{in})} = \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\mathbf{k}) \quad (4.149)$$

$$\sqrt{2E_k} a_{k,r}^{\dagger(\text{out})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\mathbf{k}) \quad (4.150)$$

y su diferencia nos da una expresión covariante que necesitaremos como paso inicial para obtener la fórmula LSZ, usando (4.18),

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_k} \left( a_{k,r}^{\dagger(\text{in})} - a_{k,r}^{\dagger(\text{out})} \right) &= Z^{-1/2} \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} u^{(r)}(\mathbf{k}) \\ &= -Z^{-1/2} \int d^4x \partial_0 \left( \bar{\psi}(x) \gamma^0 e^{-ikx} \right) u^{(r)}(\mathbf{k}) \\ &= \text{integrando por partes y usando } (\not{k} - m)u(\mathbf{k}) = 0 \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}}_x + m) e^{-ikx} u^{(r)}(\mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (4.151)$$

Del mismo modo se puede obtener

$$\sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \left( b_{\mathbf{k},r}^{\dagger(\text{in})} - b_{\mathbf{k},r}^{\dagger(\text{out})} \right) = iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{v}^{(r)}(\mathbf{k}) e^{-ikx} (i\partial_x - m)\psi(x), \quad (4.152)$$

$$\sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \left( a_{\mathbf{k},r}^{(\text{in})} - a_{\mathbf{k},r}^{(\text{out})} \right) = -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{u}^{(r)}(\mathbf{k}) e^{ikx} (i\partial_x - m)\psi(x), \quad (4.153)$$

$$\sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \left( b_{\mathbf{k},r}^{(\text{in})} - b_{\mathbf{k},r}^{(\text{out})} \right) = -iZ^{-1/2} \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\overleftarrow{\partial}_x + m) e^{ikx} v^{(r)}(\mathbf{k}). \quad (4.154)$$

Así que en la matriz  $S$  podemos sustituir un *fermión entrante* de momento  $\mathbf{k}_1$  y espín  $r$  por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_m; t_i \rangle &= \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | \left( a_{\mathbf{k}_1,r}^{\dagger(\text{in})} - a_{\mathbf{k}_1,r}^{\dagger(\text{out})} \right) | \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_m; t_i \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int d^4x_1 e^{-ik_1x_1} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_m \rangle (i\overleftarrow{\partial}_{x_1} + m) u^{(r)}(\mathbf{k}_1) \end{aligned} \quad (4.155)$$

y puede verse que, podemos sustituir a continuación, por ejemplo, un *antifermión entrante* de momento  $\mathbf{k}_2$  y espín  $s$  por

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | \bar{\psi}(x_1) | \mathbf{k}_2 \cdots \mathbf{k}_m; t_i \rangle \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) (b_{\mathbf{k}_2, s}^{\dagger(\text{in})} - b_{\mathbf{k}_2, s}^{\dagger(\text{out})}) \} | \mathbf{k}_3 \cdots \mathbf{k}_m; t_i \rangle \\
&= iZ^{-1/2} \int d^4x_2 e^{-k_2 x_2} \bar{v}^{(s)}(\mathbf{k}_2) (i\partial_{x_2} - m) \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n; t_f | T \{ \bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \} | \mathbf{k}_3 \cdots \mathbf{k}_m; t_i \rangle .
\end{aligned}
\tag{4.156}$$

Iterando el procedimiento puede encontrarse la fórmula LSZ para fermiones.

Veamos un caso particular sencillo, que es aplicación directa del resultado que hemos encontrado en (4.155) y (4.156). Estudiemos el *scattering*  $2 \rightarrow 2$ ,

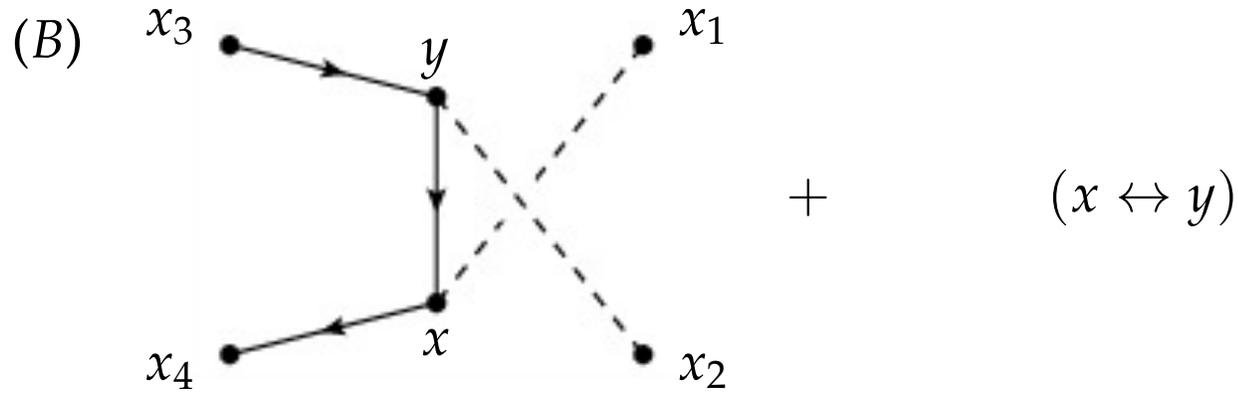
$$\text{fermión}(k_1, r) + \text{antifermión}(k_2, s) \rightarrow \text{escalar}(p_1) + \text{escalar}(p_2)$$

en la *teoría de Yukawa*, que tiene como lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\psi\phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = g\bar{\psi}\psi\phi . \quad (4.157)$$

Supongamos, para aliviar la notación, que todos los campos tienen la misma masa  $m$ . La amplitud de *scattering* viene dada por

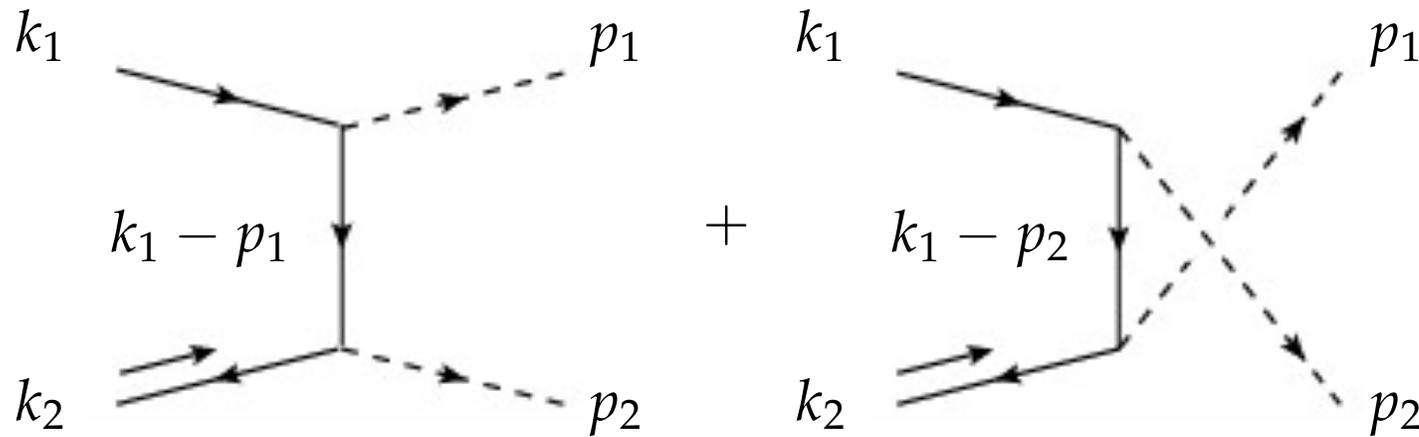




$$\begin{aligned}
 & : \phi_1 \phi_2 \overline{\psi}_3 \psi_4 \overline{\psi}_x \psi_x \phi_x \overline{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\
 & = - \overline{\phi}_1 \phi_x \overline{\phi}_2 \phi_y \overline{\psi}_4 \overline{\psi}_x \overline{\psi}_x \overline{\psi}_y \overline{\psi}_y \overline{\psi}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & : \phi_1 \phi_2 \overline{\psi}_3 \psi_4 \overline{\psi}_x \psi_x \phi_x \overline{\psi}_y \psi_y \phi_y : \\
 & = - \overline{\phi}_1 \phi_y \overline{\phi}_2 \phi_x \overline{\psi}_4 \overline{\psi}_y \overline{\psi}_y \overline{\psi}_x \overline{\psi}_x \overline{\psi}_3
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

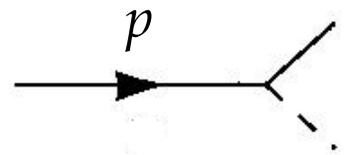
Consideremos el primero de los dos diagramas posibles, cuya contribución basta multiplicar por 2 para incluir el diagrama equivalente resultante de intercambiar  $x$  por  $y$ . Tengamos en cuenta un cambio de signo al hacer el orden normal de las contracciones, de modo que



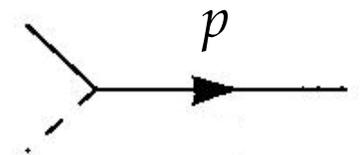
La dirección del momento en una línea fermiónica es relevante. Se toma entrante para estados iniciales y saliente para estados finales. El momento coincide con la dirección del *flujo de número fermiónico* para las líneas internas y para los estados de partícula (para un electrón se toma la dirección de la carga negativa), pero el momento tiene sentido contrario al flujo para las antipartículas. Las líneas fermiónicas se representan mediante líneas continuas y el flujo fermiónico mediante una flecha insertada en la línea. Desde ahora reservaremos las líneas discontinuas para los bosones escalares. Para escribir las reglas de Feynman hay que recorrer cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, asignando espinores, vértices y propagadores según vayan apareciendo. Veamos cuáles son las reglas de la teoría de Yukawa, que pueden deducirse del cálculo anterior:

1. Para hallar la amplitud de *scattering*, no hay que escribir los propagadores externos ni para escalares ni para fermiones, pues se cancelan en la fórmula LSZ. Basta dibujar todos los diagramas conexos amputados. Podemos ignorar los factores  $\sqrt{Z}$  a orden más bajo en TP, pero habrá que incluirlos en correcciones de orden superior. Los consideraremos incluidos dentro de la amplitud invariante  $i\mathcal{M}$  que se define, como ya hemos visto, extrayendo de la matriz  $S$  el factor  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_j k_j)$ .
2. Asociar espinores a las patas fermiónicas externas del siguiente modo (supondremos que el tiempo fluye de izquierda a derecha):

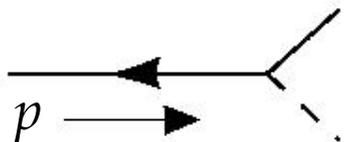
fermión entrante:


 $= u^{(s)}(\mathbf{p})$

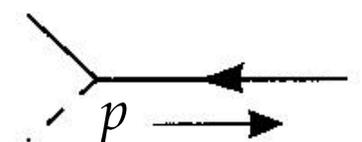
fermión saliente:


 $= \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})$

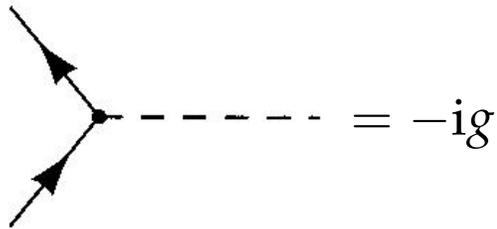
antifermión entrante:


 $= \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})$

antifermión saliente:


 $= v^{(s)}(\mathbf{p})$

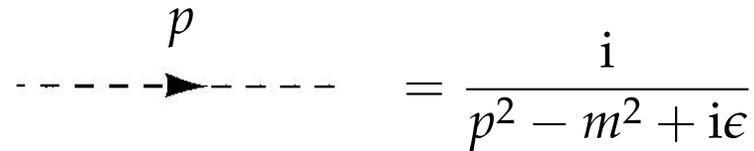
3. Vértice (imponer conservación de momento en cada vértice):



A Feynman diagram showing a vertex where two fermion lines (solid lines with arrows pointing towards the vertex) meet and a boson line (dashed line) extends to the right. The diagram is equated to the value  $-ig$ .

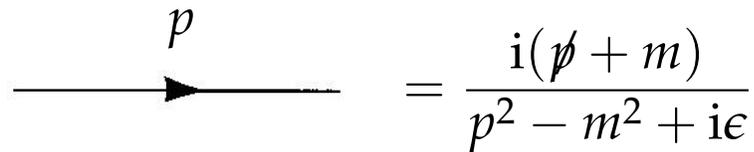
$$= -ig$$

4. Propagadores:



A Feynman diagram of a boson propagator, represented by a dashed line with an arrow pointing to the right. The momentum  $p$  is written above the line. The diagram is equated to the mathematical expression  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .

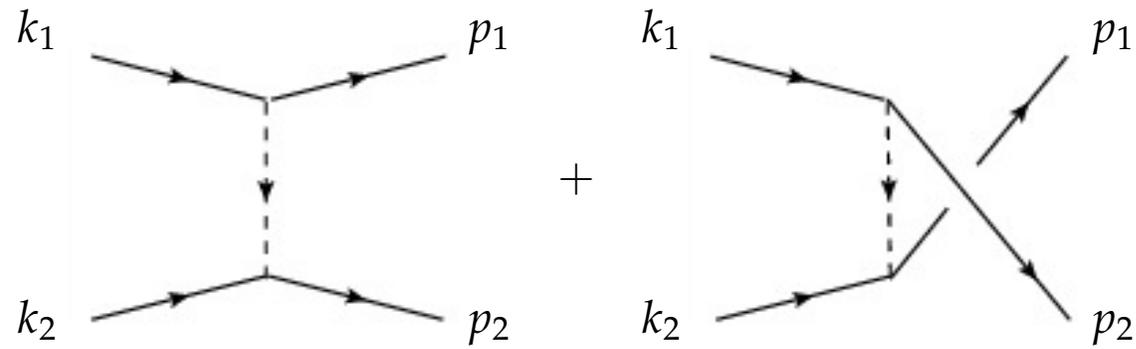
$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



A Feynman diagram of a fermion propagator, represented by a solid line with an arrow pointing to the right. The momentum  $p$  is written above the line. The diagram is equated to the mathematical expression  $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .

$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

5. Hay que tener cuidado con los signos relativos entre diagramas que involucren varias líneas fermiónicas debido a las contracciones de Wick. Por ejemplo, los siguientes diagramas contribuyen con signos opuestos a la amplitud porque entre ellos hay una permutación impar de los campos fermiónicos:



$$i\mathcal{M} = (-ig)^2 \left[ \bar{u}(p_2)u(k_2) \frac{i}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_1) - \bar{u}(p_2)u(k_1) \frac{i}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \bar{u}(p_1)u(k_2) \right]$$

6. Asignar un factor  $(-1)$  a cada *loop* cerrado de fermiones, pues

$$= \overbrace{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi} = -\text{Tr} \left[ \overbrace{\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi} \right] = -\text{Tr}(\tilde{S}_F\tilde{S}_F\tilde{S}_F\tilde{S}_F)$$