Observables

5.1 Normalización de estados relativistas y no relativistas

En mecánica cuántica no relativista, la función de onda de una partícula de momento $\boldsymbol{p}$ que se mueve libremente en el interior de una caja de volumen $V = L^3$ es

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle = C\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad \text{con} \quad \int_V \mathrm{d}^3x\, |\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{5.1}$$

y los posibles momentos p^i están cuantizados, $p_i = (2\pi/L)n_i$ con $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Entonces, en el espacio de momentos,

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle^{(\mathrm{NR})} = \int \mathrm{d}^3x\ \langle \boldsymbol{p}|x\rangle\langle x|\boldsymbol{q}\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ \psi^*_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{q}}(x) = \delta_{\boldsymbol{pq}}\ . \tag{5.2}$$

En TQC, que es una teoría cuántica relativista, la normalización anterior no es invariante Lorentz. Por eso habíamos introducido la normalización

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \ , \tag{5.3}$$

que es el límite cuando el volumen se hace infinito de

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}V\delta_{\boldsymbol{pq}} \tag{5.4}$$

pues recordemos que

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = \lim_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q}}\int \mathrm{d}x^3\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} = V(\to\infty) \ . \tag{5.5}$$

Comparando ambas normalizaciones, vemos que

$$|\boldsymbol{p}\rangle = (2E_{\boldsymbol{p}}V)^{1/2}\,|\boldsymbol{p}\rangle^{(\mathrm{NR})} \tag{5.6}$$

y por tanto,

$$|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^{n}(2E_{\boldsymbol{p}_i}V)^{1/2}\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle^{(\mathrm{NR})} \ . \tag{5.7}$$

En mecánica cuántica no relativista, se escribe la matriz $S = 1 + \mathrm{i}T$ entre un estado inicial $|i\rangle$ y otro final $|f\rangle$ como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)\ \mathrm{i}\mathcal{T}_{fi} \tag{5.8}$$

donde se extrae por conveniencia el factor $(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)$ que expresa la conservación de la energía y el momento. En TQC hemos introducido de forma análoga la matriz invariante $\mathcal{M}$ entre dos estados relativistas $|i\rangle = |\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_m\rangle$ y $|f\rangle = |\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle$, así que está claro que

$$\mathcal{M}_{fi} = \prod_{\ell=1}^{m}(2E_{\boldsymbol{k}_\ell}V)^{1/2}\prod_{j=1}^{n}(2E_{\boldsymbol{p}_j}V)^{1/2}\mathcal{T}_{fi}\ . \tag{5.9}$$

Supongamos que el estado inicial es $|i\rangle = |\boldsymbol{k}\rangle$, una partícula de masa M y momento $\boldsymbol{k}$, y el estado final $|f\rangle = |\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle$ son n partículas de masas m_j y momentos $\boldsymbol{p}_j$. La probabilidad de que la partícula inicial se desintegre en n partículas ($1 \to n$) con $|f\rangle \neq |i\rangle$ será

$$\mathrm{d}w = |(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\mathrm{i}\mathcal{T}_{fi}|^2\mathrm{d}N_f = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)VT|\mathcal{T}_{fi}|^2\mathrm{d}N_f \tag{5.10}$$

donde se ha sustituido simbólicamente $(2\pi)^4\delta^4(0) = VT$ a partir de

$$\lim_{p\to q}(2\pi)^4\delta^4(p-q) = \lim_{p\to q}\int \mathrm{d}x^4\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)x} = VT(\to\infty) \tag{5.11}$$

y $\mathrm{d}N_f$ es el número de estados de n partículas con momentos entre $\boldsymbol{p}_i$ y $\boldsymbol{p}_i + \mathrm{d}\boldsymbol{p}_i$. Hallemos primero el número de estados entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p} + \mathrm{d}\boldsymbol{p}$, que corresponden al caso de sólo una partícula final. Para ello usaremos la relación de completitud

$$1 = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\,|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}| \tag{5.12}$$

que se comprueba fácilmente, pues

$$|\boldsymbol{q}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} |\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} |\boldsymbol{p}\rangle\, 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = |\boldsymbol{q}\rangle \tag{5.13}$$

y que nos permite escribir $\mathrm{d}N$ como el producto de la probabilidad de que la partícula tenga un momento entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}+\mathrm{d}\boldsymbol{p}$, que viene a ser $\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}V$, y la densidad de estados en ese intervalo,

$$\mathrm{d}N = 2E_{\boldsymbol{p}}V\frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} = \frac{V\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\ . \tag{5.14}$$

Por tanto, en el caso de n partículas en el estado final,

$$\mathrm{d}N_f = \prod_{j=1}^{n}\frac{V\mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3}\ . \tag{5.15}$$

Así que la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, que llamaremos *anchura de desintegración*, viene dada por

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{\mathrm{d}w}{T} = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)V|\mathcal{T}_{fi}|^2\prod_{j=1}^{n}\frac{V\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3} \tag{5.16}$$

que, usando (5.9), puede expresarse como

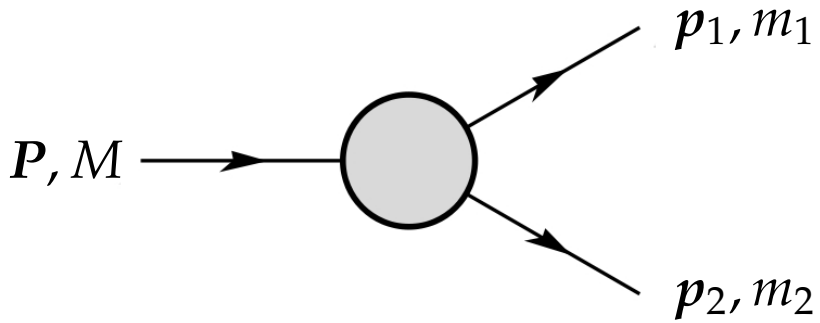
$$\boxed{\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}|\mathcal{M}_{fi}|^2\mathrm{d}\Phi_n} \tag{5.17}$$

donde se ha introducido el elemento de volumen de n cuerpos,

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_n = (2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{j=1}^{n}p_j - P_i\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j}\ .} \tag{5.18}$$

La anchura tiene dimensiones de energía o de inverso de tiempo en nuestro sistema de unidades naturales. Si trabajamos en el sistema de referencia en reposo de la partícula que se desintegra, la energía es $E_{\boldsymbol{k}} = M$, la masa de esa partícula.

Consideremos por ejemplo la desintegración $1 \to 2$:



La integral sobre el espacio de p, de $n = 2$ partículas finales en el sistema centro de masas (CM) se reduce a una integral sobre el ángulo sólido de una de ellas (la otra sale en la misma dirección y sentido contrario):

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Phi_2 &= (2\pi)^4 \int \delta^4(p_1 + p_2 - P) \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \\
&= \int \delta(E_1 + E_2 - E_{\mathrm{CM}}) \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{(2\pi)^2 2E_1 2E_2} \\
&= \int \frac{|\boldsymbol{p}|^2 \mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \frac{E_1 E_2}{|\boldsymbol{p}|(E_1 + E_2)} \\
&= \int \frac{|\boldsymbol{p}| \mathrm{d}\Omega}{16\pi^2 E_{\mathrm{CM}}} \,, \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

donde se ha usado

$$\mathrm{d}^3 p_1 = |\boldsymbol{p}_1|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1| \mathrm{d}\Omega \tag{5.20}$$

$$\delta(E_1 + E_2 - E_{\mathrm{CM}}) = \delta(f(|\boldsymbol{p}_1|) = \frac{\delta(|\boldsymbol{p}_1| - |\boldsymbol{p}|)}{|f'(|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}|)|} \tag{5.21}$$

$$E_1 = \sqrt{m_1^2 + |\boldsymbol{p}_1|^2}\,, \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 + |-\boldsymbol{p}_1|^2} \tag{5.22}$$

$$f'(|\boldsymbol{p}_1|) = \frac{\partial f}{\partial E_1}\frac{\partial E_1}{\partial |\boldsymbol{p}_1|} + \frac{\partial f}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial |\boldsymbol{p}_1|} = \frac{|\boldsymbol{p}_1|}{E_1} + \frac{|\boldsymbol{p}_1|}{E_2} = |\boldsymbol{p}_1| \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right)\,. \tag{5.23}$$

Como estamos estudiando la desintegración de una partícula, $E_{\mathrm{CM}} = M$. Nótese que las masas M, m_1 y m_2 determinan completamente la energía y los momentos finales:

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}\,, \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}\,,$$

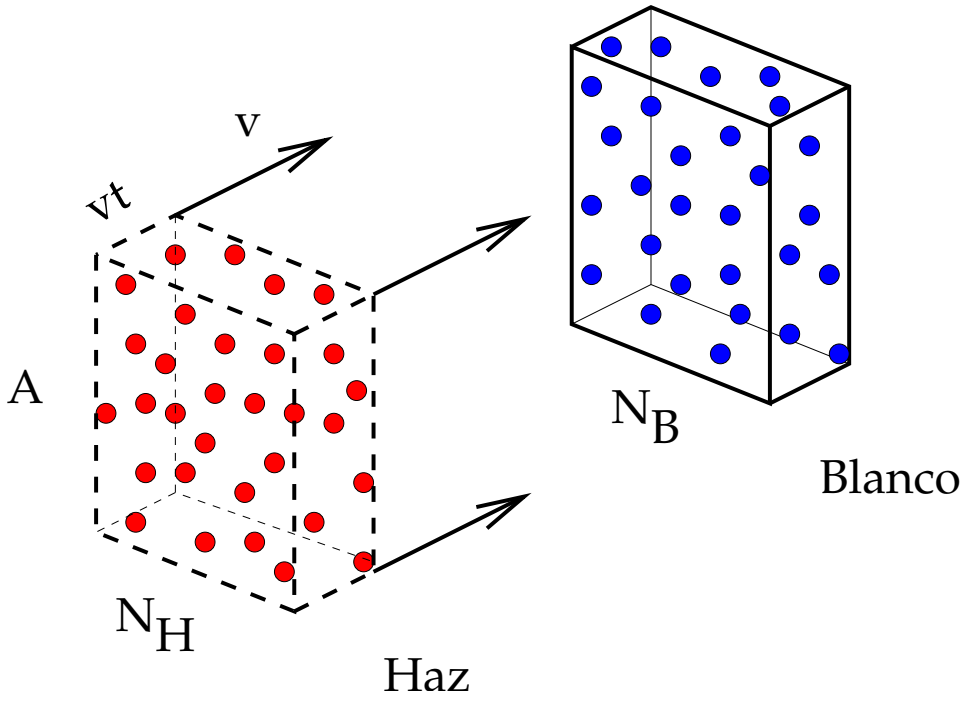
$$|\boldsymbol{p}| \equiv |\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2| = \frac{\left\{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]\right\}^{1/2}}{2M}\,. \tag{5.24}$$

La *anchura total* se obtiene sumando las *anchuras parciales* a todos los canales de desintegración. Su inversa es la *vida media* de la partícula,

$$\boxed{\tau = \Gamma^{-1}} \tag{5.25}$$

Sección eficaz

Blanco con N_B partículas bombardeado por un haz de N_H partículas de velocidad v.



La sección eficaz σ es el *área* efectiva de una partícula (blanco) vista por un proyectil (en el haz incidente). Supongamos que en el blanco hay N_B partículas y que la superficie de colisión es A. Entonces, la probabilidad de colisión es

$$\mathrm{P} = \frac{N_B \sigma}{A} \ . \tag{5.26}$$

Si en el haz hay N_H partículas, entonces el número de sucesos es N_HP,

$$(\#\text{ sucesos}) = N_H \frac{N_B \sigma}{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{(\#\text{ sucesos})}{N_H N_B} A \ . \tag{5.27}$$

En la práctica, el haz está formado por una nube de partículas de densidad ρ que se mueven con velocidad v, así que

$$\begin{aligned} N_H = \rho v t A \quad \Rightarrow \quad \sigma &= \frac{(\#\text{ sucesos})}{\rho v t A N_B} A = \frac{(\#\text{ sucesos})}{\rho v \ t N_B} \\ &= \frac{\text{probabilidad de transición por unidad de tiempo}}{\text{flujo incidente}} \\ \Rightarrow \quad \mathrm{d}\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i) V |\mathcal{T}_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n} \dfrac{V \mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3}}{\rho v} \ , \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde hemos sustituido la probabilidad de transición por unidad de tiempo (número de sucesos por cada dispersor) por la misma expresión que nos da la anchura en (5.16) (pues es equivalente al número de desintegraciones si el estado inicial consiste en una sola partícula). Hallemos ahora el flujo incidente ρv correspondiente a una partícula por unidad de volumen,

$$\rho v = \frac{1}{V}|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = \frac{1}{V}\left|\frac{\boldsymbol{k}_1}{E_H} - \frac{\boldsymbol{k}_2}{E_B}\right| = \frac{|E_B\boldsymbol{k}_1 - E_H\boldsymbol{k}_2|}{VE_HE_B} = \frac{\{(k_1k_2)^2 - M_1^2M_2^2\}^{1/2}}{VE_HE_B} \tag{5.29}$$

donde $(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$ es la velocidad relativa entre una partícula del haz y otra del blanco, de masas M_1 y M_2 respectivamente, que supondremos colineales $(\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}_2)$,[a] de modo que, en efecto, obtenemos una expresión para el flujo que es invariante bajo *boosts* en la dirección colineal,

$$\begin{aligned} &k_1 = (E_H, \boldsymbol{k}_1)\ , \quad k_2 = (E_B, \boldsymbol{k}_2) \\ &\qquad \Rightarrow \quad (k_1k_2)^2 - M_1^2M_2^2 = (E_HE_B + |\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}_2|)^2 - M_1^2M_2^2 = |E_B\boldsymbol{k}_1 - E_H\boldsymbol{k}_2|^2\ , \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde hemos supuesto que los dos haces son colineales al tomar $\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2 = -|\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}_2|$. Por tanto, a partir de (5.28) y (5.29), la sección eficaz de $|i\rangle = |\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\rangle$ a $|f\rangle = |\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle$ queda

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)|\mathcal{T}_{fi}|^2}{4\{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}} 2E_H 2E_B V^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{V \mathrm{d}^3 p_j}{(2\pi)^3} \ . \tag{5.31}$$

y sustituyendo (5.9), tenemos finalmente

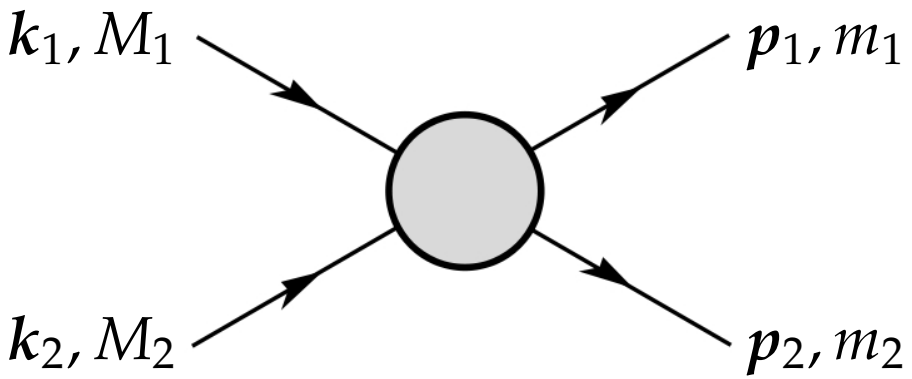
$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{1/2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Phi_n} \tag{5.32}$$

Nótese que si hay n_r partículas idénticas de la especie r en el estado final la sección eficaz total, tras integrar sobre el espacio fásico, debe dividirse por el factor de simetría

$$S = \prod_r n_r! \ . \tag{5.33}$$

Y si el estado incial no está polarizado y/o la polarización del estado final no se mide debe promediarse sobre las polarizaciones iniciales y/o sumarse sobre las finales, respectivamente.

Consideremos ahora el caso particular del *scattering* $2 \to 2$ en el sistema CM:



La integral sobre el espacio fásico aparece en (5.19). El factor de flujo se obtiene de

$$k_1 \equiv (E_1, \boldsymbol{k}) \,, \quad k_2 = (E_2, -\boldsymbol{k}) \,, \quad E_{\rm CM} = E_1 + E_2 \,, \quad 4\left\{(k_1 k_2)^2 - M_1^2 M_2^2\right\}^{1/2} = 4 E_{\rm CM} |\boldsymbol{k}| \,. \tag{5.34}$$

---

[a] Así nos vale tanto para colisiones de blanco fijo, como el de la figura (5.1), como para colisionadores de partículas en los que se hacen chocar dos haces.

Así que

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2}\frac{|\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{k}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{5.35}$$

Finalmente, un comentario sobre las dimensiones de las magnitudes utilizadas:

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} + \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\mathcal{T}_{fi} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{S}_{fi}] = [\text{energía}]^0 \,, \quad [\mathcal{T}_{fi}] = [\text{energía}]^4$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \prod_{j=1}^{n_i+n_f}(2E_jV)^{1/2}\mathcal{T}_{fi} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{M}_{fi}] = [\text{energía}]^{4-n_i-n_f}$$

$$\mathrm{d}\Phi_n = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{d}\Phi_n] = [\text{energía}]^{-4+2n}$$

$$\mathrm{d}\sigma(n_i = 2 \to n) = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2\mathrm{d}\Phi_n}{4\left\{(k_1k_2)^2 - M_1^2M_2^2\right\}^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad [\sigma] = [\text{energía}]^{-2} = [\text{longitud}]^2$$

$$\mathrm{d}\Gamma(n_i = 1 \to n) = \frac{1}{2M}|\mathcal{M}_{fi}|^2\mathrm{d}\Phi_n \quad \Rightarrow \quad [\Gamma] = [\text{energía}] = [\text{tiempo}]^{-1}$$

Resultan convenientes los factores de conversión:

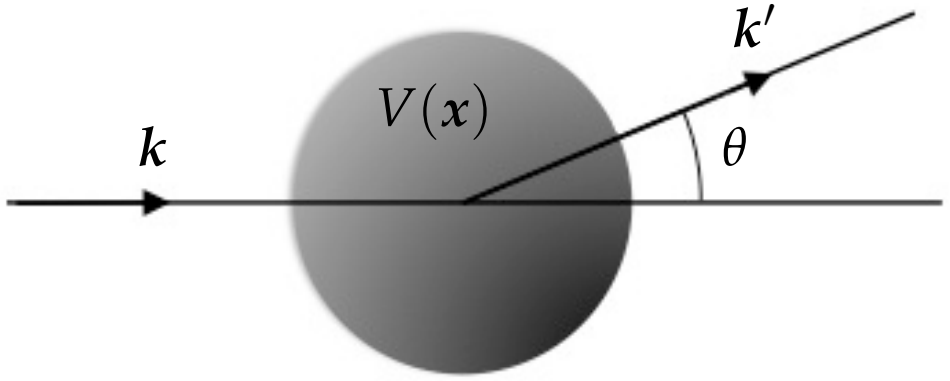
$$\hbar \approx 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \tag{5.36}$$

$$(\hbar c)^2 \approx 0.389 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn} \tag{5.37}$$

$$\hbar c \approx 200 \text{ MeV fm}\,, \quad c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}\,, \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}\,, \quad 1 \text{ barn} \equiv 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Límite no relativista: potenciales de interacción

En el límite no relativista (NR) los cálculos realizados mediante diagramas de Feynman (TQC) deben reproducir los resultados de la mecánica cuántica no relativista, donde la interacción entre partículas se describe en términos de un potencial $V(\boldsymbol{x})$.



Para hallar el potencial recordemos que la sección eficaz *elástica* de dispersión de una partícula de masa m por un potencial $V(\boldsymbol{x})$ es

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta)|^2 \tag{5.38}$$

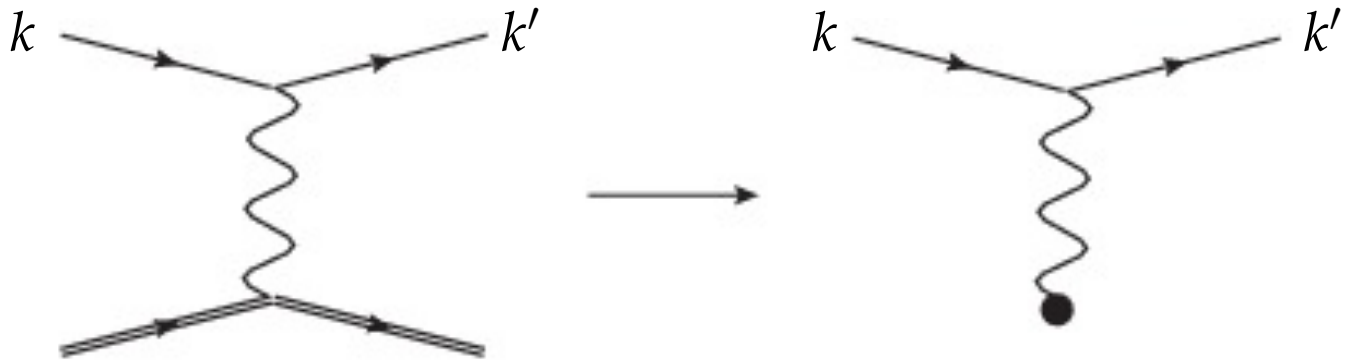
donde θ es el *ángulo de scattering* y $f(\theta)$ es la *amplitud de scattering* no relativista, que puede calcularse perturbativamente. A primer orden (*aproximación de Born*),

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi}\int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x})\ , \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}\ , \quad k = |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|\ . \tag{5.39}$$

Si el potencial es central, $V = V(r)$, la expresión anterior se convierte en

$$f(\theta) = -\frac{2m}{q}\int_0^\infty \mathrm{d}r\ rV(r)\sin qr\ , \quad q = |\boldsymbol{q}| = 2k\sin\frac{\theta}{2}\ . \tag{5.40}$$

Consideremos $k \ll m$ (propio del límite NR) y sea el blanco que genera el potencial una partícula muy pesada de masa $M_A \gg m$. Ésta es, por ejemplo, la situación típica cuando un electrón es dispersado por un núcleo, de modo que podemos despreciar el retroceso del núcleo. Diagramáticamente:



La sección eficaz elástica ($k = |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$, $E_{\rm CM} \approx M_A$) es

$$\mathrm{d}\sigma_{\text{elást}} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\boldsymbol{k}'|}{|\boldsymbol{k}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega \approx \frac{1}{64\pi^2 M_A^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega \,. \tag{5.41}$$

Para encontrar la expresión no relativista correspondiente, recordemos que

$$\mathcal{M}_{fi} = (2E_{\boldsymbol{k}}V)^{1/2}(2E_{\boldsymbol{k}'}V)^{1/2}(2E_A V)^{1/2}(2E_A V)^{1/2}\mathcal{T}_{fi} \approx 4mM_A V^2 \mathcal{T}_{fi} \,, \tag{5.42}$$

de modo que en el límite NR, ignorando los factores de V que sabemos deben cancelarse en la fórmula correcta,

$$\mathrm{d}\sigma_{\text{elást}} \approx \frac{m^2}{4\pi^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{5.43}$$

lo que, comparando con (5.38), nos dice que

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi} \mathcal{T}_{fi} \,, \tag{5.44}$$

donde el signo global es el apropiado según demostrará un cálculo concreto, y a partir de (5.39),

$$\mathcal{T}_{fi}(\boldsymbol{q}) = -\int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad V(\boldsymbol{x}) = -\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \mathcal{T}_{fi}(\boldsymbol{q})\ . \tag{5.45}$$

Nótese que el potencial de interacción es un concepto no relativista, que describe una *interacción instantánea*. Sin embargo, la descripción más precisa de la TQC se basa en el intercambio y propagación de partículas, como hemos visto a lo largo de este tema.