

Procesos elementales en QED

6.1 El lagrangiano y las reglas de Feynman de la QED

La *electrodinámica cuántica* (QED) describe la interacción entre electrones (o cualquier otra partícula cargada de espín 1/2) y fotones. Resulta conveniente cuantizar el campo de Maxwell de forma covariante, Conviene además generalizar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.1)$$

donde ζ es un parámetro genérico.

usamos $\zeta = 1$, pero puede demostrarse igualmente que si se impone que $\partial_\mu A^\mu$ se anule entre estados físicos, el espectro de la teoría viene dado exclusivamente por los estados de polarización transversa del fotón. El efecto neto del segundo término de (6.1), que se llama *término de gauge fixing*, es romper la invariancia gauge del lagrangiano, pero los elementos de matriz entre estados físicos serán independientes de la elección de ζ .^a Sin embargo, las reglas de conmutación entre los campos y el propagador dependerán de ζ . Es aconsejable trabajar con ζ genérico y al final comprobar la corrección de los cálculos verificando que ζ se cancela en los elementos de matriz entre estados físicos. No obstante, dependiendo del tipo de problema, los cálculos se simplifican bastante si se elige el llamado R_ζ gauge apropiado. En particular, $\zeta = 1$ es el *gauge de 't Hooft-Feynman*, $\zeta = 0$ es el *gauge de Landau* y $\zeta \rightarrow \infty$ es el *gauge unitario* (en el que sólo intervienen los grados de libertad físicos).

^aEn presencia de interacciones la independencia en ζ se logra siempre que A_μ se acople a la materia respetando la invariancia gauge, es decir si lo hace a una corriente conservada.

Halleemos el progagador del fotón. Para aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este lagrangiano, nótese que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\bar{\zeta}} g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \quad (6.2)$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \partial^\nu \partial^\mu A_\mu = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu A_\mu = 0 \\
&\Rightarrow \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu = 0 \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Ya sabemos que el propagador es una función de Green del operador que actúa sobre el campo en la ecuación anterior. En el espacio de momentos, el propagador del fotón es, por tanto, el inverso de

$$-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu . \quad (6.4)$$

Nótese que este operador es invertible gracias a que hemos introducido el término de *gauge fixing*, pues $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ es singular (tiene autovalor nulo k^μ), lo que tiene que ver con la simetría gauge: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ también es solución de $(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu = 0$. El inverso de (6.4), incluyendo la prescripción de Feynman que ya hemos discutido, es el *propagador del fotón*

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (6.5)$$

En efecto,

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \left[-k^2 g_{\nu\rho} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\nu k_\rho \right] = i\delta_\rho^\mu . \quad (6.6)$$

La elección del signo global es la apropiada pues, mientras que para campos escalares las reglas de conmutación son $[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, para el campo de Maxwell con $\xi = 1$ son $[a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] = \zeta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$,

Para describir la interacción electromagnética a nivel cuántico (QED) hemos de fijar el gauge, como en (6.1), e interpretar las interacciones entre campos cuánticos como intercambio de partículas (fotones, electrones y antielectrones o positrones). El lagrangiano de partida es

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieQ_f A_\mu \quad (6.7)$$

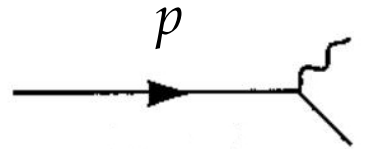
que contiene una interacción de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -eQ_f A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (6.8)$$

Para hallar perturbativamente la matriz de *scattering* de un proceso en QED basta con aplicar las reglas de Feynman correspondientes. Respecto a los casos que hemos tratado en el tema anterior, las novedades son: el propagador del fotón, que se lee directamente de (6.5), el vértice de interacción, que se deduce trivialmente de (6.8), y un factor de polarización cuando el fotón se encuentra en una pata externa, que no existe en el caso de un campo escalar. Resumimos a continuación las reglas de Feynman de la QED:

– Patas externas:

fermión entrante:


$$= u^{(s)}(\mathbf{p})$$

fermión saliente:


$$= \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})$$

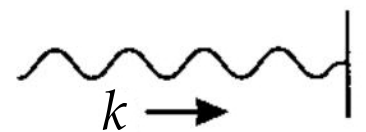
antifermión entrante:


$$= \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})$$

antifermión saliente:


$$= v^{(s)}(\mathbf{p})$$

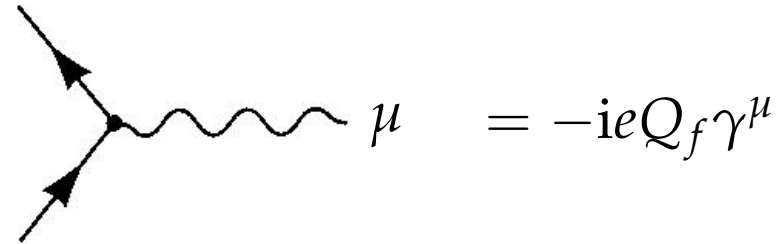
fotón entrante:


$$= \epsilon_{\mu}(\mathbf{k}, \lambda)$$

fotón saliente:


$$= \epsilon_{\mu}^*(\mathbf{k}, \lambda)$$

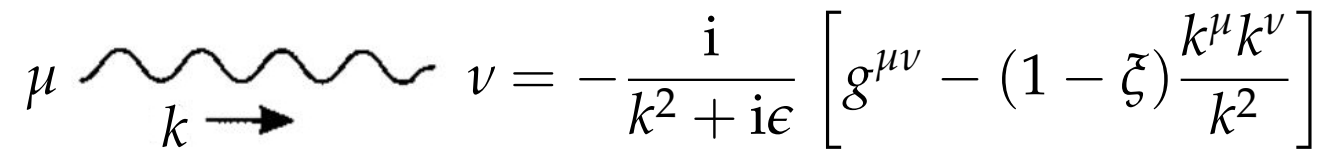
– Vértice:



A Feynman diagram showing a vertex where two fermion lines (solid lines with arrows) meet a photon line (wavy line). The photon line is labeled with the index μ . The vertex is equated to the expression $-ieQ_f\gamma^\mu$.

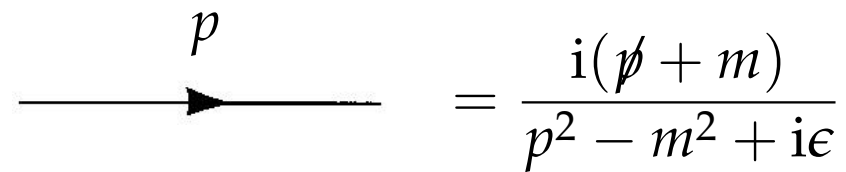
$$\mu = -ieQ_f\gamma^\mu$$

– Propagadores:



A Feynman diagram of a photon propagator, represented by a wavy line between two vertices labeled μ and ν . The momentum k is indicated by an arrow pointing to the right below the wavy line. The propagator is equated to the expression $-\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]$.

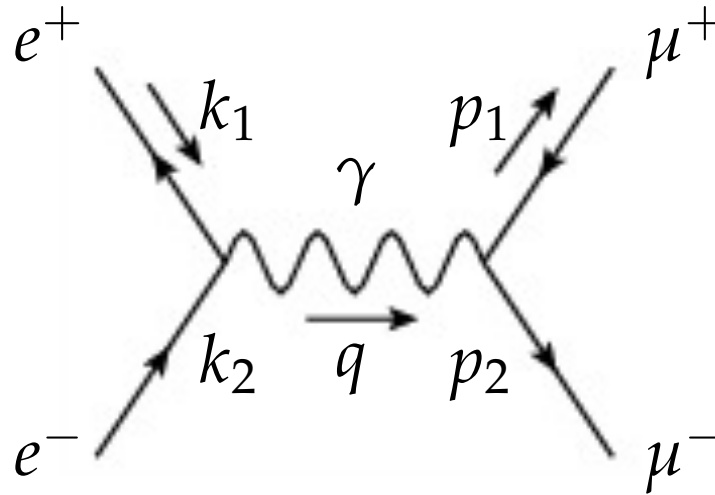
$$\mu \nu = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]$$



A Feynman diagram of a fermion propagator, represented by a solid line with an arrow pointing to the right, labeled with momentum p . The propagator is equated to the expression $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

$$p = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Un proceso sencillo: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



Consideremos la aniquilación de un electrón y un positrón para dar un muón y un antimuón. En QED este proceso viene descrito a orden más bajo de TP (nivel árbol) por el diagrama de la figura 6.1. El muón tiene la misma carga del electrón, $Q_\mu = Q_e = -1$, Q_f es la carga eléctrica en unidades de e del fermión

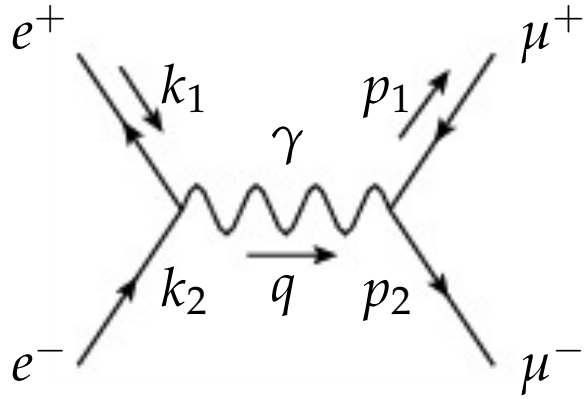
y una masa M unas 200 veces mayor que la masa m del electrón. Vamos a hallar paso a paso y en detalle la sección eficaz de este proceso.

En primer lugar, asignamos momentos a todas las partículas del diagrama y usamos la conservación del cuadrimomento en cada vértice, lo que fija el cuadrimomento del fotón virtual que se propaga entre los dos vértices de interacción,

$$q = k_1 + k_2 = p_1 + p_2 . \quad (6.9)$$

Las patas externas son fermiones, cuyos espines etiquetamos mediante índices r_1, r_2, s_1, s_2 que toman dos valores posibles (1,2).

Aplicando las reglas de Feynman, recorriendo cada línea fermiónica en sentido contrario al flujo fermiónico, el elemento de matriz invariante viene dado por



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)(ie\gamma^\beta)v^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)\frac{-i}{q^2}\left[g_{\alpha\beta} - (1 - \zeta)\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right]\bar{v}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1)(ie\gamma^\alpha)u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2). \quad (6.10)$$

Nótese que como los fermiones externos están sobre su capa de masas satisfacen las respectivas ecuaciones de Dirac,

$$\not{k}_1 v^{(r_1)}(\mathbf{k}_1) = -m v^{(r_1)}(\mathbf{k}_1), \quad \not{k}_2 u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) = m u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2), \quad (6.11)$$

así que la amplitud no depende del parámetro ζ , como deber ser, ya que

$$q_\alpha \bar{v}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1)\gamma^\alpha u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) = \bar{v}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1)(\not{k}_1 + \not{k}_2)u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) = 0. \quad (6.12)$$

Podríamos haber trabajado desde el principio en el *gauge* de 't Hooft-Feynman ($\xi = 1$). Por tanto,

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \gamma^\alpha v^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \bar{v}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1) \gamma_\alpha u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) . \quad (6.13)$$

Para hallar $|\mathcal{M}|^2$, nótese que

$$(\bar{u} \gamma^\alpha v)^* = v^\dagger \gamma^{\alpha\dagger} \gamma^{0\dagger} u = v^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 u = \bar{v} \gamma^\alpha u , \quad (6.14)$$

donde se ha usado

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 , \quad \gamma^{\alpha\dagger} = \gamma_\alpha , \quad \gamma^0 \gamma_\alpha \gamma^0 = \gamma^\alpha . \quad (6.15)$$

Se trata además de un número complejo que podemos multiplicar en cualquier orden. Lo mismo ocurre con la otra línea fermiónica. Conviene escribir,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \bar{u}^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \gamma^\alpha v^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \bar{v}^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \gamma^\beta u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \bar{v}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1) \gamma_\alpha u^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) \bar{u}^{(r_2)}(\mathbf{k}_2) \gamma_\beta v^{(r_1)}(\mathbf{k}_1) . \quad (6.16)$$

Podemos ahora hacer uso de las propiedades de espinores y matrices de Dirac, que conducen a multitud de identidades (*Diracología*). En particular, puede verse que los dos estados de espín a lo largo del eje z satisfacen

$$u^{(1)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{m}}{2} (\not{p} + m) , \quad (6.17)$$

$$u^{(2)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \quad (6.18)$$

$$v^{(1)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m), \quad (6.19)$$

$$v^{(2)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m), \quad (6.20)$$

donde $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ en el sistema de referencia en el que $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. En general,

$$u(\mathbf{p}, n)\bar{u}(\mathbf{p}, n) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} + m), \quad v(\mathbf{p}, n)\bar{v}(\mathbf{p}, n) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} (\not{p} - m) \quad (6.21)$$

proyectan sobre polarizaciones bien definidas a lo largo de una dirección n^μ , que cumple $n^2 = -1$ y $p_\mu n^\mu = 0$. Si elegimos, por simplicidad, el eje z como dirección del movimiento, $p^\mu = (E, 0, 0, |\mathbf{p}|)$, los operadores anteriores proyectan sobre los dos estados de helicidad de partícula y antipartícula, respectivamente, si tomamos $n^\mu = \pm(|\mathbf{p}|/m, 0, 0, E/m)$. En particular, en el límite ultrarrelativista ($E \gg m$) los proyectores sobre quiralidades *right* y *left* de partícula y antipartícula son:

$$u^{(1)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} + m) \rightarrow u_R(p)\bar{u}_R(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2}(\not{p} + m), \quad (6.22)$$

$$u^{(2)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} + m) \rightarrow u_L(p)\bar{u}_L(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2}(\not{p} + m), \quad (6.23)$$

$$v^{(1)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} - m) \rightarrow v_L(p)\bar{v}_L(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2}(\not{p} - m), \quad (6.24)$$

$$v^{(2)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} - m) \rightarrow v_R(\mathbf{p})\bar{v}_R(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2}(\not{p} - m). \quad (6.25)$$

Otra propiedad que se demuestra fácilmente de lo anterior es

$$\bar{u}(\mathbf{p}, n)\Gamma u(\mathbf{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} + m) \right], \quad \bar{v}(\mathbf{p}, n)\Gamma v(\mathbf{p}, n) = \text{Tr} \left[\Gamma \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}(\not{p} - m) \right], \quad (6.26)$$

donde Γ es una matriz 4×4 arbitraria. Por otro lado, si los fermiones no están polarizados el cálculo se simplifica notablemente pues podemos aplicar directamente las relaciones de completitud,

$$\sum_s u^{(s)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(s)}(\mathbf{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^{(s)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(s)}(\mathbf{p}) = \not{p} - m, \quad (6.27)$$

que conducen a

$$\sum_s \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})\Gamma u^{(s)}(\mathbf{p}) = \text{Tr} [\Gamma(\not{p} + m)], \quad \sum_s \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})\Gamma v^{(s)}(\mathbf{p}) = \text{Tr} [\Gamma(\not{p} - m)]. \quad (6.28)$$

Volvamos a nuestro cálculo (6.16) y supongamos por simplicidad que tanto los fermiones iniciales como los finales no están polarizados. Tenemos entonces que promediar sobre espines iniciales y sumar sobre espines finales:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[\gamma^\alpha (\not{p}_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}_2 + M)] \text{Tr}[\gamma_\alpha (\not{k}_2 + m) \gamma_\beta (\not{k}_1 - m)] , \end{aligned} \quad (6.29)$$

que aparece como el producto de las trazas de las dos *cadena fermiónicas*.

Para hallar las trazas volvemos a recurrir a la *Diracología*. Necesitamos en particular,

$$\text{Tr}[\# \text{ impar } \gamma' \text{'s}] = 0 \quad (6.30)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (6.31)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (6.32)$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\alpha (\not{p}_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}_2 + M)] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha \not{p}_1 \gamma^\beta \not{p}_2] - M^2 \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] \\ &= 4(p_1^\alpha p_2^\beta - (p_1 p_2) g^{\alpha\beta} + p_1^\beta p_2^\alpha) - 4M^2 g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\alpha (\not{k}_2 + m) \gamma_\beta (\not{k}_1 - m)] &= \text{Tr}[\gamma_\alpha \not{k}_1 \gamma_\beta \not{k}_2] - m^2 \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] \\ &= 4(k_{1\alpha} k_{2\beta} - (k_1 k_2) g_{\alpha\beta} + k_{1\beta} k_{2\alpha}) - 4m^2 g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.34)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{16e^4}{4q^4} [(p_1 k_1)(p_2 k_2) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + (p_1 k_2)(p_2 k_1) - m^2(p_1 p_2) \\
&\quad - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + 4(p_1 p_2)(k_1 k_2) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + 4m^2(p_1 p_2) \\
&\quad + (p_1 k_2)(p_2 k_1) - (p_1 p_2)(k_1 k_2) + (p_1 k_1)(p_2 k_2) - m^2(p_1 p_2) \\
&\quad - M^2(k_1 k_2) + 4M^2(k_1 k_2) - M^2(k_1 k_2) + 4M^2 m^2] \\
&= \frac{8e^4}{q^4} [(p_1 k_1)(p_2 k_2) + (p_1 k_2)(p_2 k_1) + m^2(p_1 p_2) + M^2(k_1 k_2) + 2M^2 m^2] .
\end{aligned}
\tag{6.35}$$

El siguiente paso es elegir un sistema de referencia. Supongamos el sistema centro de masas y sea θ el ángulo que forma el μ^+ saliente con el e^+ incidente,

$$k_1^\mu = E(1, 0, 0, \beta_i) ,$$

$$k_2^\mu = E(1, 0, 0, -\beta_i) , \quad \beta_i = \sqrt{1 - m^2/E^2} , \quad (6.36)$$

$$p_1^\mu = E(1, \beta_f \sin \theta, 0, \beta_f \cos \theta) ,$$

$$p_2^\mu = E(1, -\beta_f \sin \theta, 0, -\beta_f \cos \theta) , \quad \beta_f = \sqrt{1 - M^2/E^2} . \quad (6.37)$$

Entonces,

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = E_{\text{CM}}^2 = 4E^2 , \quad (6.38)$$

$$(p_1 k_1) = (p_2 k_2) = E^2(1 - \beta_i \beta_f \cos \theta) , \quad (6.39)$$

$$(p_1 k_2) = (p_2 k_1) = E^2(1 + \beta_i \beta_f \cos \theta) , \quad (6.40)$$

$$(p_1 p_2) = E^2(1 + \beta_f^2) = E^2(2 - M^2/E^2) , \quad (6.41)$$

$$(k_1 k_2) = E^2(1 + \beta_i^2) = E^2(2 - m^2/E^2) \quad (6.42)$$

y la expresión (6.35) queda

$$\begin{aligned} \widetilde{\sum}_{r_i} \sum_{s_i} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2E^4} [2E^4(1 + \beta_i^2 \beta_f^2 \cos^2 \theta) + 2E^2(m^2 + M^2)] \\ &= e^4 \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

La sección eficaz diferencial del proceso se obtiene a partir de la expresión (5.35),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} \sqrt{\frac{E_{\text{CM}}^2 - 4M^2}{E_{\text{CM}}^2 - 4m^2}} \left[1 + 4 \frac{m^2 + M^2}{E_{\text{CM}}^2} + \left(1 - \frac{4m^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \left(1 - \frac{4M^2}{E_{\text{CM}}^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (6.44)$$

donde se ha sustituido la constante de estructura fina $\alpha = e^2 / (4\pi)$. Nótese que $E_{\text{CM}} > 2M$, la energía umbral del proceso. La sección eficaz total es

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (6.45)$$

En el límite ultrarrelativista ($E_{\text{CM}} \gg M, m$),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E_{\text{CM}}^2} (1 + \cos^2\theta) \quad (6.46)$$

$$\sigma \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{CM}}^2}. \quad (6.47)$$