Reglas de Feynman para QED

- Resumen
- Propiedadas
- Diracología
- Ejemplos

Electrones y positrones

- Espinones

$u^{(s)}$ y $v^{(s)}$ (s = spin) satisfacen la ecuación de Dirac: $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$

- Adjuntos

$\overline{u} = u^\dagger \gamma^0$ y $\overline{v} = v^\dagger \gamma^0$ satisfacen: $\overline{u}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0$

- Ortogonalidad

$\overline{u}^{(1)} u^{(2)} = 0$; $\overline{v}^{(1)} v^{(2)} = 0$

Normalización

$\overline{u}u = 2m$; $\overline{v}v = -2m$

Completitud

$\sum_s u^{(s)}\overline{u}^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu + m$ and $\sum_s v^{(s)}\overline{v}^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu - m$

Fotones

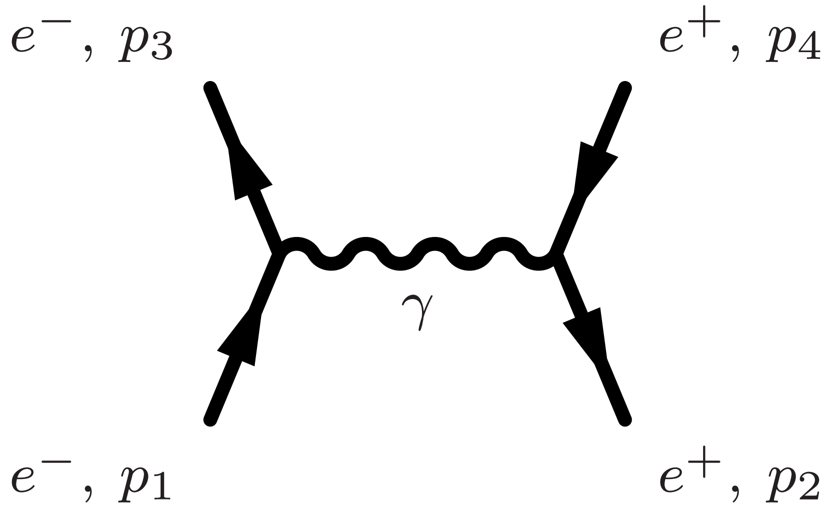
$$A^{\mu}(x) = ae^{-ip\cdot x}\epsilon^{\mu}(p)$$

- Condición de Lorentz: $\epsilon^{\mu}p_{\mu} = 0$
- Ortogonalidad: $\epsilon^{\mu}_{(1)}\epsilon_{\mu(2)} = 0$
- Normalización: $\epsilon^{\mu *}\epsilon_{\mu} = 1$
- Gauge de Coulomb: $\epsilon^{0} = 0$ y $\epsilon \cdot \mathbf{p} = 0$
- Completitud: $\sum_{s}(\epsilon_{(s)})_i(\epsilon^{*}_{(s)})_j = \delta_{ij} - p_i p_j$

Reglas de Feynman para la QED 1

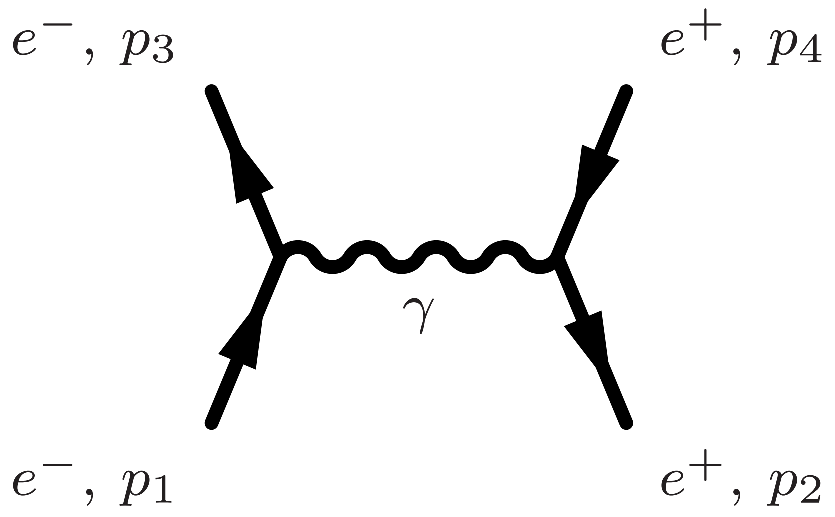
Las reglas de Feynman proveen la receta para calcular la amplitud *M* a partir de los diagramas de Feynman

- Paso 1: para un proceso de interés dado, dibujar el diagrama de Feynman con el mínimo número de vértices. Pueden existir más de 1 (ver Wick)



Reglas de Feynman para la QED 2

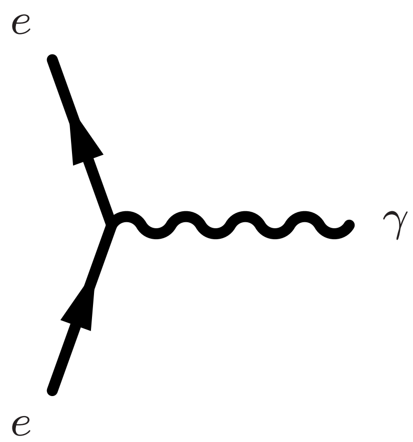
- Paso 2: para cada diagrama, indicar el cuadri-momento en cada línea, forzando la conservación del cuadri-momento en todos los vértices



Notar que las flechas estás presentes sólo en las líneas fermiónicas y representan el flujo de partículas, no el de momentos.

- Paso 3: la amplitud depende de los factores de los vértices; los propagadores para las líneas internas, y de las funciones de onda para las patas externas.

Factores en los vértices

- Cada vértice  contrubuye con un factor

$$ig_e\gamma^\mu$$

- g_e es una constante de acoplamiento adimensional y está relacionada con la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{g_e^2}{4\pi}$$

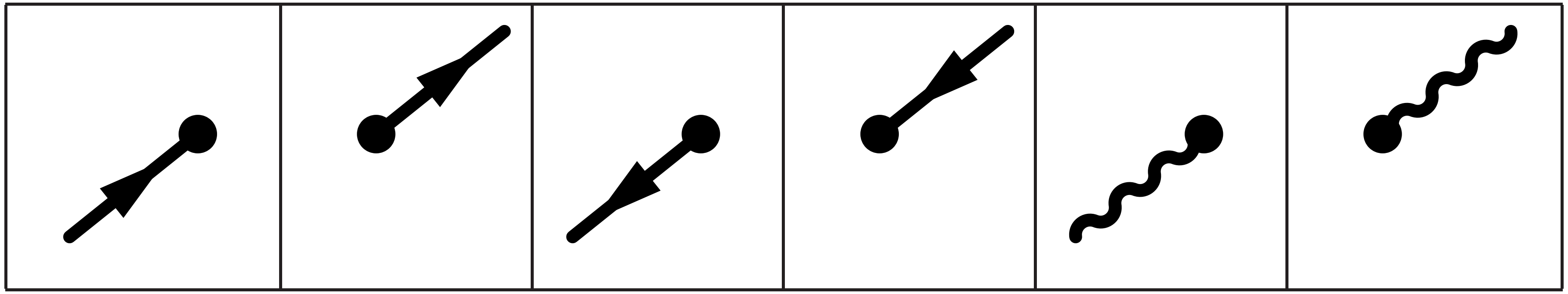
Propagadores

- Cada fotón interno conecta dos vértices de la forma: $ig_e\gamma^\mu$ y $ig_e\gamma^\nu$, entonces esperamos que el propagador contraiga los índices μ y ν.
- Propagador del fotón: $$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$
- Propagador para el fermión: $$\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$$
- El signo de ***q*** importa. Tomamos el mismo signo que la dirección de la flecha fermiónica.

Líneas Externas

- Como cada factor de vértice y los propagadores de los fermiones incolucran matrices de 4x4, pero la amplitud M debe ser un escalar, las patas externas son importantes

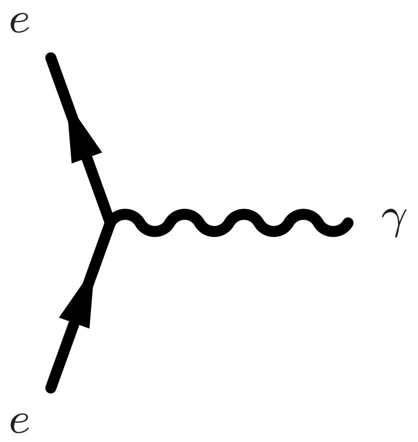
- Funcionan al revés a lo largo de cada línea de fermión



e^- in	e^- out	e^+ in	e^+ out	γ in	γ out
u	$\bar{u}$	$\bar{v}$	v	ϵ_μ	ϵ_μ^*

Elementos de matriz 1

- Siguiendo la línea del fermión hacia atrás, $\overline{u}(2) i g \gamma^{\mu} u(1)$

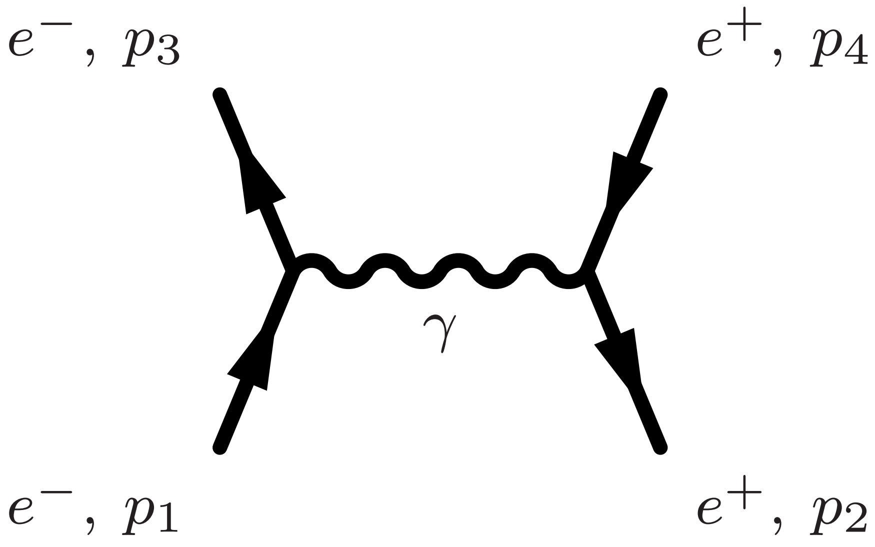


$j^{\mu} = \overline{u} \gamma^{\mu} u$ está asociada con la corriente de electrones

Elementos de matriz 2

El elemento de matriz es proporcional a las dos corrientes en el diagrama de abajo

$$[\bar{u}_3(ig_e\gamma^\mu)u_1]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1-p_3)^2}\right)[\bar{v}_2(ig_e\gamma^\nu)v_4]$$



Finalmente …

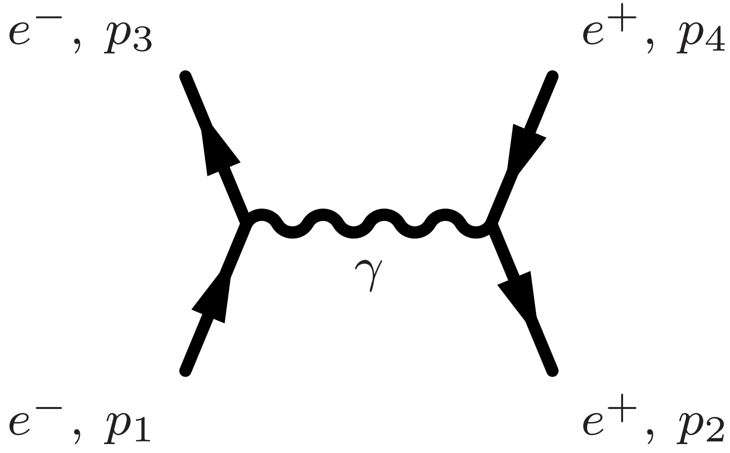
- Paso 4: la amplitud total es la suma de las amplitudes individuales para cada diagrama

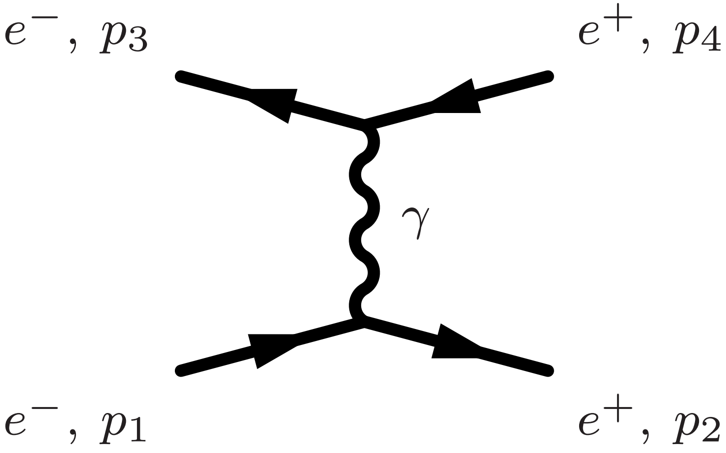
$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \ldots \\
\Rightarrow \ |\mathcal{M}^2| &= |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \ldots|^2
\end{aligned}
$$

- Paso 4a: antisimetrización

Incluye un signo “menos” entre diagramas que difieren solamente en el intercambio de dos fermiones idénticos

Ejemplo: **Bhabha Scattering**





Antisimetrización: $\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_t - \mathcal{M}_s$

$$\mathcal{M}_t = i\left[\bar{u}_3(ig_e\gamma^\mu)u_1\right]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1-p_3)^2}\right)\left[\bar{v}_2(ig_e\gamma^\nu)v_4\right]$$

$$\mathcal{M}_s = i\left[\bar{u}_3(ig_e\gamma^\mu)v_4\right]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}\right)\left[\bar{v}_2(ig_e\gamma^\nu)u_1\right]$$

Ejemplo: **Compton Scattering**

No hay antisimetrización: $\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$

$$\mathcal{M}_1 = i\left[\bar{u}_4(ig_e\gamma^\mu)\left(\frac{i(\not{p}_1 - \not{p}_3 + m)}{(p_1 - p_3)^2 - m^2}\right)(ig_e\gamma^\nu)u_1\right]\epsilon^*_{3\nu}\epsilon_{2\mu}$$

$$\mathcal{M}_2 = i\left[\bar{u}_4(ig_e\gamma^\mu)\left(\frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2}\right)(ig_e\gamma^\nu)u_1\right]\epsilon^*_{3\mu}\epsilon_{2\nu}$$

Partículas polarizadas

- Una amplitud típica de QED tendrá la forma $$\mathcal{M} \sim [\bar{u}_1 \Gamma^\mu v_2]\, \epsilon_{3\mu}$$

- Para obtener un número para *M* necesitamos incluir las expresiones explícitas para las patas externas $\bar{u}_1$, v_2 y $\epsilon_{3\mu}$.

- Las partículas externas pueden o no estas polarizadas.

Amplitudes promediadas en espín

Si la polarización de las partículas no nos importa necesitaremos:

1- promediar sobre las polarizaciones de los estados iniciales de las partículas

2- sumar sobre las polarizaciones de los estados de las partículas finales al calcular: $|\mathcal{M}|^2$.

Amplitudes promediadas en espín: $\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle$

Suma sobre espines 1

Supongamos que tenemos: $\mathcal{M} \sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2]$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &\sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2] [\bar{u}_1 \Gamma u_2]^* \\
&\sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2] \left[u_1^\dagger \gamma^0 \Gamma u_2\right]^\dagger \\
&\sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2] \left[u_2^\dagger \Gamma^\dagger \gamma^{0\dagger} u_1\right] \\
&\sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2] \left[u_2^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u_1\right] \\
&\sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2] \left[\bar{u}_2 \bar{\Gamma} u_1\right]
\end{aligned}
$$

Suma sobre espines 2

Matriz al cuadrado: $|\mathcal{M}|^2 \quad \sim \quad [\bar{u}_1 \Gamma u_2]\,[\bar{u}_2 \bar{\Gamma} u_1]$

Usando la relación de completitud: $u_2 \bar{u}_2$

$$\sum_{s_i=1,2} u_i^{s_i} \bar{u}_i^{s_i} = (\not{p}_i + m_i)$$

Sumando sobre el espín de la partícula 2:

$$\sum_{s_2} |\mathcal{M}|^2 \quad \sim \quad [\bar{u}_1 \Gamma (\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma} u_1]$$

$$\sim \quad [\bar{u}_1 Q u_1]$$

Suma sobre espines 3

$$
\begin{aligned}
[\bar{u}_1 Q u_1] &= (\bar{u}_1)_i \, Q_{ij} \, (u_1)_j \\
&= Q_{ij} \, (u_1 \bar{u}_1)_{ji} \\
&= [Q \, (u_1 \bar{u}_1)]_{ii} \\
&= \mathrm{Tr} \, [Q (u_1 \bar{u}_1)]
\end{aligned}
$$

Otra vez completitud:

$$
\sum_{s_1} |\mathcal{M}|^2 \sim \mathrm{Tr} \, [Q(\not{p}_1 + m_1)]
$$

Suma sobre espines 4

Empezando de $$\mathcal{M} \sim [\bar{u}_1 \Gamma u_2]$$

Promediando sobre espines iniciales y sumando sobre espines finales

$$\Rightarrow \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle \sim \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[\Gamma(\not{p}_2 + m_2)\bar{\Gamma}(\not{p}_1 + m_1)\right]$$

Partículas 1 y 2 pueden o no estar en el estado inicial

El factor ½ viene del promedio sobre espines iniciales

Algunos trucos

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = \mathrm{Tr}\left[\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a)\right]$$

Si hay antipartículas,

$$\sum_{s_i=1,2} v_i^{s_i} \bar{v}_i^{s_i} = (\not{p}_i - m_i)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B) &= \mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B) \\
\mathrm{Tr}(\alpha A) &= \alpha \mathrm{Tr}(A) \\
\mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA) \\
\mathrm{Tr}(ABC) &= \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 4 \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Como: $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}.$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= \gamma_\mu \left(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu\right) \\
&= 2\gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \\
&= 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu \\
&= -2\gamma^\nu
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)/2 \\
&= \mathrm{Tr}(2g^{\mu\nu})/2 \\
&= g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}(1) \\
&= 4g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\right)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu) &= 0 \\
\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) &= 0
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \begin{cases} -1 & \text{for } \textit{even} \text{ permutations of } 0123 \\ +1 & \text{for } \textit{odd} \text{ permutations of } 0123 \\ 0 & \text{if any 2 indices are the same} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} &= -24 \\ \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} &= -6\,\delta^\sigma_\tau \\ \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\theta\tau} &= -2\left(\delta^\lambda_\theta\delta^\sigma_\tau - \delta^\lambda_\tau\delta^\sigma_\theta\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Queremos calcular $T = \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p}_1 + m)\gamma^\nu (\not{p}_3 + m)\right]$

Expandimos en los 4 términos, pero 2 de ellos involucran productos de 3 matrices-γ, que serán cero. Entonces:

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) + m^2 \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 4\left(p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu}\right) + 4m^2 g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Consideremos ahora: $\mathcal{A} = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2)\,\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \quad &= \quad 4\left[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1\cdot p_2) g^{\mu\nu}\right] \\
& \quad\quad \times 4\left[p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - (p_1\cdot p_2) g_{\mu\nu}\right] \\
&= \quad 16\left[2p_1^2 p_2^2 + 2(p_1\cdot p_2)^2 + 4(p_1\cdot p_2)^2 - 4(p_1\cdot p_2)^2\right] \\
&= \quad 32\left[m_1^2 m_2^2 + (p_1\cdot p_2)^2\right]
\end{aligned}
$$