

Formalismo de integrales de camino

En 1933, Dirac hizo la observación de que mientras en mecánica clásica la acción juega un papel central (principio de Hamilton), en mecánica cuántica la acción parecía no tener ningún papel relevante, por lo que se sabía hasta entonces. Así que especuló, sin éxito, con la posibilidad de que el propagador de la mecánica cuántica correspondiera a $\exp\{iS/\hbar\}$ donde S es la acción clásica evaluada a lo largo del camino clásico.

En 1948, Feynman desarrolló esa idea de Dirac y logró derivar una nueva formulación de la mecánica cuántica basada en el hecho de que el propagador puede escribirse como una suma sobre todos los posibles caminos (no solamente el camino clásico) entre un estado inicial y otro final, cada uno de los cuales contribuye con $\exp\{iS/\hbar\}$ al propagador. En cierto sentido, la partícula cuántica toma todos los caminos y la amplitud de probabilidad de cada uno de ellos se suma, de acuerdo con las reglas habituales de la mecánica cuántica (principio de superposición).

En realidad, las integrales de camino no ofrecen ningún nuevo resultado en la mecánica cuántica ordinaria de una partícula, y de hecho los cálculos suelen ser más fáciles de hacer en el formalismo habitual. Sin embargo, es muy útil en situaciones más complicadas, como en teoría de campos. En cualquier caso, el formalismo de integrales de camino constituye un aporte fundamental a la mecánica cuántica:

- (i) Proporciona una forma extremadamente interesante e intuitiva de visualizar los procesos cuánticos.
- (ii) El límite clásico de la mecánica cuántica se entiende de una forma muy natural, como enseguida veremos.

Pero sin duda es en teoría cuántica de campos (ya sea relativista o no) donde las integrales de camino juegan un papel más importante:

- (i) Proporcionan una forma relativamente sencilla de cuantizar los campos. Se denomina *cuantización funcional*. Además permiten obtener sistemáticamente las funciones de Green, que expresan las amplitudes de probabilidad de procesos físicos tales como el *scattering* y la desintegración de partículas.
- (ii) El tratamiento con integrales de camino de las teorías de campos gauge (especialmente las no abelianas) es muy elegante y casi imprescindible: el *gauge fixing* y los *campos fantasma* aparecen prácticamente sin esfuerzo.
- (iii) Existe una gran cantidad de fenómenos no perturbativos, como solitones e instantones, que se pueden entender más fácilmente mediante integrales de camino.
- (iv) Además, la estrecha relación entre mecánica estadística y mecánica cuántica, o entre teoría estadística de campos y teoría cuántica de campos, se hace evidente a través de las integrales de camino.

1.3 La integral de camino en mecánica cuántica

Para comprender el formalismo de integrales de camino, consideremos el sistema cuántico más simple: una partícula no relativista de masa m que se mueve en una dimensión sometida a un potencial V . Su hamiltoniano es el operador

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) , \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar . \quad (1.4)$$

Recordemos que en el picture de Schrödinger los estados evolucionan con el tiempo,

$$|\psi_S\rangle(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi_S\rangle(0) \quad (1.5)$$

mientras que en el picture de Heisenberg los estados son independientes del tiempo,

$$|\psi_H, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar} |\psi_S\rangle(t) \quad (1.6)$$

(aunque recuerdan el t en que se han definido) y son los operadores los que evolucionan.

En el picture de Heisenberg llamaremos $|x, t_i\rangle$ al vector que en un instante t_i es autoestado del operador posición $\hat{x}(t_i)$ con valor x , es decir,

$$\hat{x}(t_i) |x, t_i\rangle = x |x, t_i\rangle \quad (1.7)$$

donde

$$|x, t_i\rangle = e^{i\hat{H}t_i/\hbar} |x_i\rangle \quad (1.8)$$

siendo $|x_i\rangle \equiv |x\rangle(t_i)$ el mismo estado escrito en el picture de Schrödinger.

Supongamos que queremos calcular la amplitud de probabilidad de que la partícula viaje desde un punto x_i a otro punto x_f en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. En el formalismo canónico esta amplitud viene dada por

$$\mathcal{A} = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} | x_i \rangle \quad (1.9)$$

Nótese que en cada instante fijo t , los estados $|x, t\rangle$ forman un conjunto completo,

$$1 = \int dx |x, t\rangle \langle x, t| \quad (1.10)$$

donde en adelante se sobreentiende que las integrales van desde $-\infty$ hasta ∞ . Elegiremos una serie de tiempos intermedios $t_n \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ con $t_i \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_N \equiv t_f$ y los tomaremos por simplicidad equiespaciados,

$$t_n = t_0 + n\delta t, \quad \delta t = \frac{t_f - t_i}{N}. \quad (1.11)$$

Entonces la amplitud (1.9) puede escribirse

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_1 \langle x_f, t_f | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int dx_1 dx_2 \langle x_f, t_f | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\
&= \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} \langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle
\end{aligned} \tag{1.12}$$

donde se ha introducido la notación $x_i \equiv x_0$, $x_f \equiv x_N$. Y para δt suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}
\langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle &= \langle x_{n+1} | e^{-i\hat{H}\delta t/\hbar} | x_n \rangle \\
&= \langle x_{n+1} | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle + \mathcal{O}(\delta t)^2 .
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Utilizando ahora la base de momentos

$$1 = \int dp |p\rangle \langle p| \tag{1.14}$$

y la siguiente normalización de la onda plana,

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{ipx/\hbar} \tag{1.15}$$

que es consistente con

$$\delta(x - y) = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | y \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(x-y)/\hbar} \quad (1.16)$$

podemos escribir, despreciando términos de orden $(\delta t)^2$,

$$\begin{aligned} \langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle &= \langle x_{n+1} | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle \\ &= \int dp_n \langle x_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | (1 - i\hat{H}\delta t/\hbar) | x_n \rangle \\ &= \int dp_n \langle x_{n+1} | p_n \rangle [1 - iH(p_n, x_n)\delta t/\hbar] \langle p_n | x_n \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x_{n+1}-x_n)/\hbar} e^{-iH(p_n, x_n)\delta t/\hbar} \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p_n \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} - H(p_n, x_n) \right] \delta t \right\} . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sustituyendo en (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_n \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} - H(p_n, x_n) \right] \delta t \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nótese que en la expresión anterior estamos integrando sobre todos los valores posibles de x_1, \dots, x_{N-1} y que cada conjunto de valores define un *camino*, es decir, una función $x(t)$ definida por la interpolación de $x(t_0) = x_0, \dots, x(t_N) = x_N$, estando los extremos fijos. Así que en (1.18) estamos integrando sobre funciones $x(t)$ con condiciones de contorno fijas (figura 1.1). Hay además una integral sobre N momentos p_0, \dots, p_{N-1} . Esta expresión es por tanto la versión discretizada de la *integral funcional*

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{x} - H(p, x)] \right\} \quad (1.19)$$

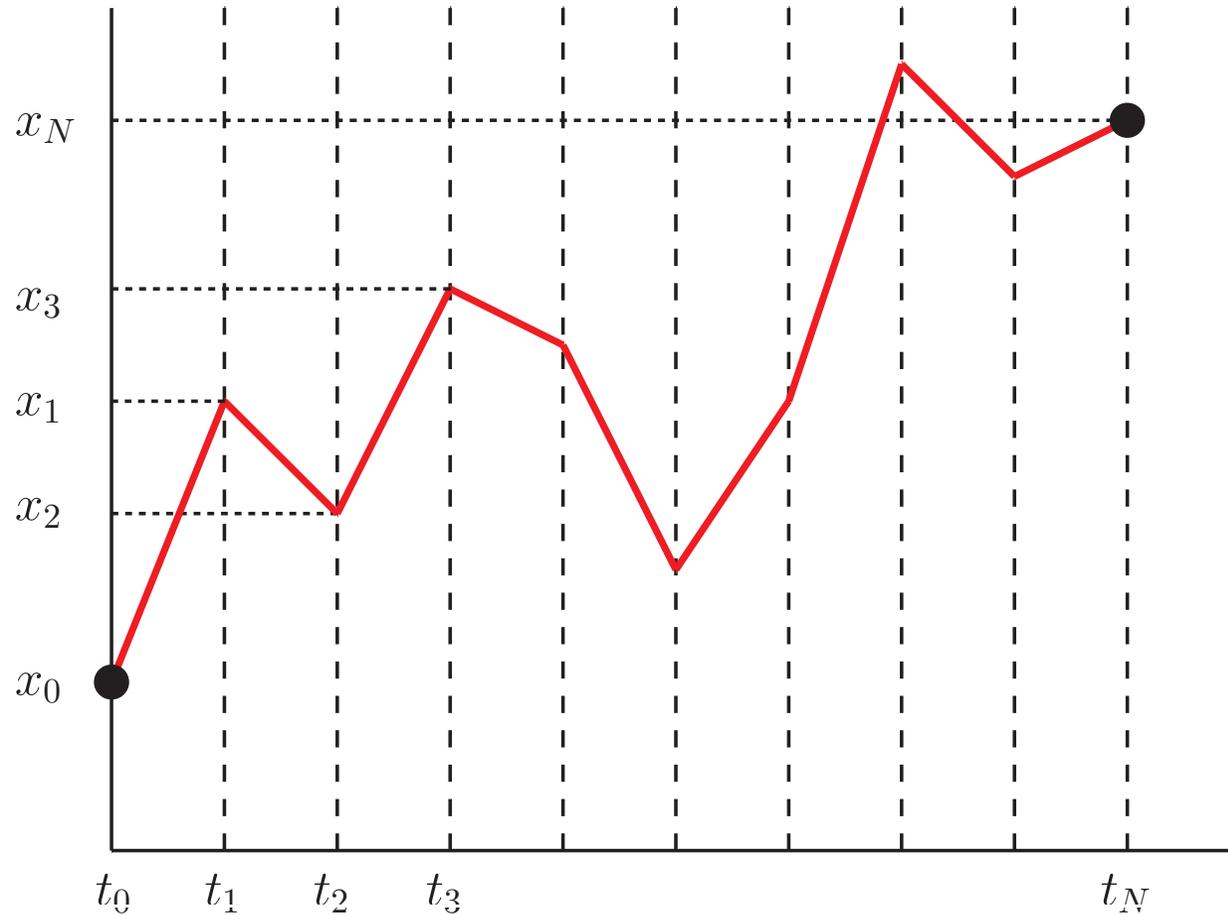


Figura 1.1: La función $x(t)$ definida por la interpolación de $x(t_0) = x_0, \dots, x(t_N) = x_N$.

donde las funciones $x(t)$ están fijas en los extremos, pero las $p(t)$ no. La medida funcional es la integral estándar sobre el espacio de fases

En nuestro caso (1.4) el potencial no depende de las velocidades, así que puede hacerse la integral sobre los momentos. La contribución del potencial $V(x)$ factoriza y el resto se obtiene a partir de

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -p_n^2 \frac{i\delta t}{2m\hbar} + p_n \frac{i(x_{n+1} - x_n)}{\hbar} \right\} = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\delta t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(x_{n+1} - x_n)^2}{2\hbar\delta t} \right\} \quad (1.20)$$

donde se ha usado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-a\omega^2 + b\omega} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{b^2/(4a)} \quad (1.21)$$

y se ha prolongado analíticamente el integrando oscilatorio tratando $i\delta t$ como real. Así que,

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\delta t} \right)^{N/2} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} \right)^2 - V(x_n) \right] \delta t \right\} . \end{aligned} \quad (1.22)$$

La expresión anterior es la versión discretizada de la integral funcional:^d

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] \right\} . \quad (1.23)$$

^d La integración sobre caminos $\mathcal{D}x(t)$ involucra una intrincada constante de normalización que en la versión de campos $\mathcal{D}\phi$ no necesitaremos evaluar.

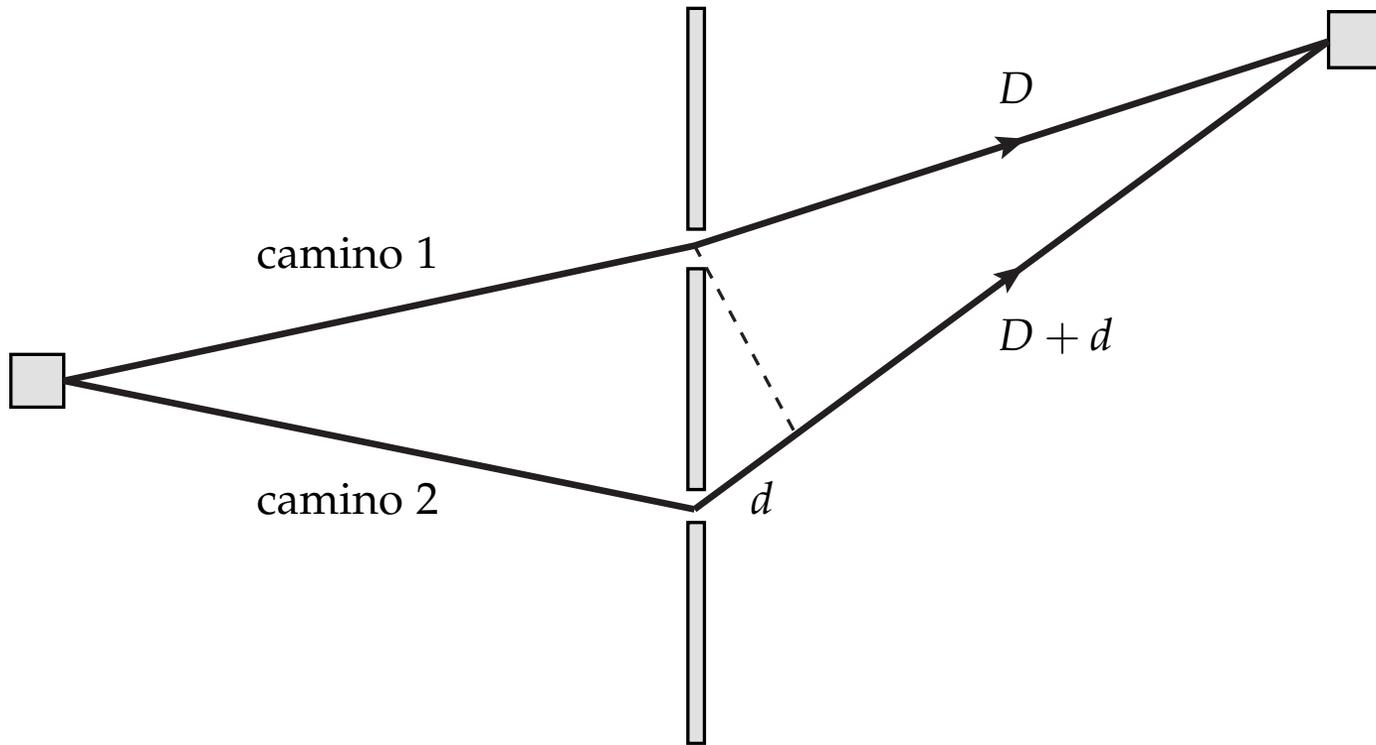


Figura 1.2: Experimento de la doble rendija.

Es decir,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right\} \quad (1.24)$$

donde la acción $S[x(t)]$ es un *funcional* de todos los posibles caminos y viene dada por

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}), \quad L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x). \quad (1.25)$$

El resultado que acabamos de obtener era esperable. En mecánica cuántica, cuando un proceso puede tener lugar por varios caminos la amplitud de probabilidad es la suma coherente (principio de superposición) de las amplitudes por cada camino. Debemos interpretar el símbolo $\mathcal{D}x(t)$ como *suma sobre todos los caminos*. Piénsese en el experimento de la doble rendija (figura 1.2). Que la fase de cada una de las amplitudes sea sencillamente la acción dividida por \hbar también tiene sentido: la diferencia de fase entre los dos caminos para una partícula que pueda pasar por ambas rendijas es

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{mv_2^2 t}{2} - \frac{mv_1^2 t}{2} \right) \approx \frac{mDd}{\hbar t} \approx \frac{pd}{\hbar} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad (1.26)$$

donde se ha usado que los caminos 1 y 2 se recorren con velocidades $v_1 = D/t$ y $v_2 = (D + d)/t$, respectivamente, siendo $d \ll D$, de modo que $v = v_1 \approx v_2$, y se ha introducido la relación debida a de Broglie $p = h/\lambda$ con $p = mv$.

Además, en el *límite clásico* ($\hbar \rightarrow 0$) obtenemos directamente que solamente hay un camino que contribuye, el que minimiza la acción, como postula el principio de Hamilton. En efecto, la *aproximación de fase estacionaria* establece que la única contribución a la amplitud de probabilidad cuando $S \gg \hbar$ es la que corresponde al camino clásico, en el que la variación de la acción es

$$\left. \frac{\delta}{\delta x(t)} S[x(t)] \right|_{\text{cl}} = 0 \quad (1.27)$$

Finalmente vamos a descubrir otro resultado interesante que nos será útil después. Hemos escrito la amplitud de probabilidad $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ como una integral de camino,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS/\hbar}, \quad S = \int_{t_i}^{t_f} dt L. \quad (1.28)$$

Veamos ahora que el elemento de matriz del operador posición en la imagen de Heisenberg $\hat{x}(t)$ entre esos mismos estados, en un instante t_1 cualquiera entre t_i y t_f , es la integral de camino pesada por la función $x(t_1)$,

$$\langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) e^{iS/\hbar} \quad (1.29)$$

y, lo que es aún más interesante, el elemento de matriz del *producto ordenado temporal* de n operadores posición es la integral de camino del producto de funciones,

$$\langle x_f, t_f | T\{\hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n)\} | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x x(t_1) \cdots x(t_n) e^{iS/\hbar} \quad (1.30)$$

Probémoslo. Nótese que la integral es sobre todas las funciones $x(t)$ con extremos fijos. La podemos denotar como

$$\int \mathcal{D}x \equiv \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} [\mathbf{d}x] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}\bar{x} \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_1)=\bar{x}} [\mathbf{d}x] \int_{x(t_1)=\bar{x}}^{x(t_f)=x_f} [\mathbf{d}x] , \quad (1.31)$$

que hemos separado por conveniencia en dos trozos. También podemos separar

$$\int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_1} dt L + \int_{t_1}^{t_f} dt L , \quad (1.32)$$

así que

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}x x(t_1) e^{iS/\hbar} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}\bar{x} \left(\int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_1)=\bar{x}} [\mathbf{d}x] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_1} dt L \right\} \right) \bar{x} \left(\int_{x(t_1)=\bar{x}}^{x(t_f)=x_f} [\mathbf{d}x] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} dt L \right\} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}\bar{x} \langle x_f, t_f | \bar{x}, t_1 \rangle \bar{x} \langle \bar{x}, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}\bar{x} \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | \bar{x}, t_1 \rangle \langle \bar{x}, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &= \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Por otro lado, como los $x(t_k)$ son números, que conmutan, podemos reordenar de mayor a menor todos los tiempos $\{t_1, \dots, t_n\}$ de modo que $\bar{t}_1 > \dots > \bar{t}_n$ y encontrar trivialmente, iterando el procedimiento anterior, que

$$\int \mathcal{D}x x(t_1) \cdots x(t_n) e^{iS/\hbar} = \int \mathcal{D}x x(\bar{t}_1) \cdots x(\bar{t}_n) e^{iS/\hbar} = \langle x_f, t_f | T\{\hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n)\} | x_i, t_i \rangle .$$

(1.34)