1.4 Cuantización funcional de campos escalares

1.4.1 Funciones de Green

Podríamos haber hecho toda la discusión de la clase anterior suponiendo un sistema de partículas descrito por un conjunto finito de coordenadas generalizadas $\{q_j(t)\}$ donde j va desde 1 hasta el número de grados de libertad (igual al triple del número de partículas del sistema si trabajamos en tres dimensiones). Bastaría entonces cambiar la integral funcional $\int[\mathrm{d}x]$ por $\int\prod_j[\mathrm{d}q_j]$.

Si en cambio tenemos un *medio continuo* el sistema viene descrito por un *campo*, una función de las coordenadas espaciales y el tiempo. Consideraremos para empezar el caso más simple, un campo escalar,

$$\{q_j(t)\} \longrightarrow \phi(\boldsymbol{x},t) = \phi(x) \ . \tag{1.35}$$

Entonces la amplitud de transición, análoga a (1.24), desde una configuración inicial del campo $\phi_i(\boldsymbol{x})$ en t_i a otra final $\phi_f(\boldsymbol{x})$ en t_f es

$$\left\langle \phi_f(\boldsymbol{x}), t_f \middle| \phi_i(\boldsymbol{x}), t_i \right\rangle = \int_{\phi(t_i,\boldsymbol{x})=\phi_i(\boldsymbol{x})}^{\phi(t_f,\boldsymbol{x})=\phi_f(\boldsymbol{x})} \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L} \right\} \tag{1.36}$$

donde se ha introducido la densidad lagrangiana a partir de

$$L = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L} \tag{1.37}$$

y se supone un potencial independiente de derivadas de campos con lo que el hamiltoniano es cuadrático en los momentos, que pueden integrarse como en (1.20):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \ . \tag{1.38}$$

La medida de integración $\mathcal{D}\phi$ involucra de nuevo una constante complicada que no necesitaremos escribir explícitamente.

Ahora tomaremos $|\phi_i(\boldsymbol{x}), t_i = -\infty\rangle \equiv |0, -\infty\rangle$, $\left|\phi_f(\boldsymbol{x}), t_f = +\infty\right\rangle \equiv |0, +\infty\rangle$ (el *vacío*) como configuraciones inicial y final de los campos en $t \to \mp\infty$, respectivamente. Ésas serán nuestras condiciones de contorno en adelante. Entonces (1.36) se convierte en

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar} \ , \quad S = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L} \ . \tag{1.39}$$

También podemos hallar, en analogía con (1.30), los elementos de matriz de productos ordenados temporales de operadores de campos cuánticos como

$$\langle 0, +\infty | \, T\{\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)\} \, | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar} \, . \tag{1.40}$$

A partir de ahora, denotaremos el vacío inicial simplemente como $|0\rangle \equiv |0, -\infty\rangle$. Si el *vacío es estable*, entonces al dejarlo evolucionar entre $-\infty$ y $+\infty$ seguiremos encontrando el mismo vacío, lo que en mecánica cuántica significa que ambos estados difieren a lo sumo en una fase:

$$|0, +\infty\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \, |0, -\infty\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle \, . \tag{1.41}$$

Aplicando (1.39) obtenemos esa fase y podemos escribir

$$\boxed{\langle 0 | \, T\{\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)\} \, | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}}{\int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}}} \tag{1.42}$$

Hemos logrado expresar los elementos de matriz en el vacío de productos ordenados temporales de operadores de campos en términos de integrales de camino. Estos objetos se llaman *funciones de n puntos* o *funciones de Green* pues, como veremos enseguida, son efectivamente funciones de Green $G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ de operadores diferenciales.

Nótese que los campos que aparecen en las expresiones anteriores no son en principio libres, sino que están sometidos a un potencial $V(\phi)$. En el formalismo canónico (los campos son operadores), las funciones de Green se obtienen escribiendo el miembro de la izquierda de (1.42) en el picture de interacción y aplicando el teorema de Wick a un desarrollo en teoría de perturbaciones.

Veremos en §1.4.3 cómo calcular las funciones de Green aplicando el formalismo de integrales de camino (los campos son funciones), primero en el caso de campos libres y después en presencia de una interacción. Para ello manipularemos el miembro de la derecha de (1.42). La ventaja de este método es que, en principio, este lado de la ecuación está también definido más allá de la teoría de perturbaciones, lo que permite calcularlo con otros procedimientos, por ejemplo, discretizando el espaciotiempo en un *retículo* (*lattice*).

Pero antes, en el siguiente apartado, tenemos que incidir en un detalle importante que hasta ahora hemos pasado por alto.

1.4.2 Rotación de Wick

En el caso de *una* partícula, hemos visto en (1.24) que la amplitud de la transición entre x_i, t_i y x_f, t_f viene dada por

$$\left\langle x_f, t_f \middle| x_i, t_i \right\rangle = \int \mathcal{D}x \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, L(x, \dot{x}) \right\} \tag{1.43}$$

con la condición de contorno $x(t_i) = x_i$, $x(t_f) = x_f$, siendo $H = p^2/(2m) + V(x)$, lo que es suficientemente general para nuestros propósitos. Pero en teoría cuántica de campos las partículas son *creadas* (en una colisión o en una desintegración) en t_i y *destruidas* al ser observadas (detección) en t_f. El acto de creación puede representarse mediante una *fuente* y el de destrucción por un sumidero, que puede verse también como la desaparición de la fuente. Lo que nececesitamos conocer es la *amplitud de la transición vacío-vacío en presencia de una fuente* que llamaremos $J(t)$, es decir,

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \tag{1.44}$$

donde $t_f = -t_i \to \infty$. Esta representación se debe a Schwinger (1969) y consiste en modificar el lagrangiano

$$L \longrightarrow L + \hbar J(t) x(t) \ . \tag{1.45}$$

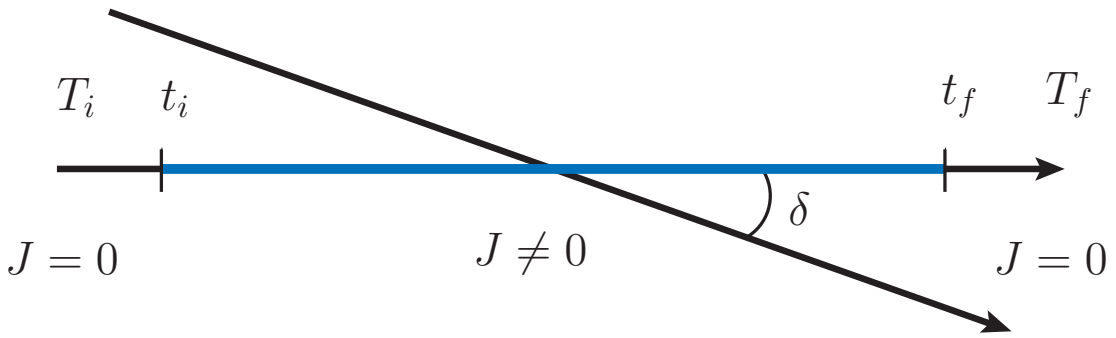


Figura 1.3: Rotación del eje temporal para calcular la amplitud de transición vacío-vacío.

La fuente $J \neq 0$ solamente entre t_i y t_f, siendo $T_i < t_i < t_f < T_f$. Entonces

$$\langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J = \int \mathcal{D}x \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{T_i}^{T_f} \mathrm{d}t \, (L + \hbar J x) \right\} \tag{1.46}$$

que podemos separar en

$$\langle x_f, T_f | x_i, T_i \rangle_J = \int \mathrm{d}x' \mathrm{d}x \, \langle x_f, T_f | x', t_f \rangle \, \langle x', t_f | x, t_i \rangle_J \, \langle x, t_i | x_i, T_i \rangle \ . \tag{1.47}$$

Ahora usamos (1.8) e introducimos un conjunto completo de autoestados de la energía $\varphi_n(x) = \langle x | E_n \rangle$ con lo que

$$\langle x_f, T_f | x', t_f \rangle = \langle x_f | \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(T_f - t_f)} \, | x' \rangle = \sum_m \varphi_m(x_f) \varphi_m^*(x') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_m(T_f - t_f)/\hbar} \tag{1.48}$$

$$\langle x, t_i | x_i, T_i \rangle = \langle x | \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t_i - T_i)} \, | x_i \rangle = \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^*(x_i) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t_i - T_i)/\hbar} \ . \tag{1.49}$$

Si tomamos el límite $T_i \to -\infty \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$ y $T_f \to +\infty \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$, con un ángulo de rotación arbitrario $0 < \delta \leq \pi/2$ (figura 1.3), conseguimos que a las sumatorias anteriores solamente contribuya el estado con E_n más pequeño, es decir E_0, que es el *estado fundamental*, es decir, el *vacío*. Esto es así porque $\mathrm{Im} T_i = \mathrm{i}|T_i| \sin\delta$ y entonces el término $(\mathrm{i}/\hbar) E_n T_i$ tiene una parte real negativa que produce un factor de supresión $\mathrm{e}^{-(1/\hbar)E_n |T_i| \sin\delta}$. Y análogamente para el término con T_f. Entonces,

$$\lim_{\substack{T_i\to-\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\\ T_f\to+\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}} \left\langle x_f, T_f \middle| x_i, T_i \right\rangle_J = \lim_{\substack{T_i\to-\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\\ T_f\to+\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}} \varphi_0(x_f)\varphi_0^*(x_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(T_f-T_i)/\hbar}$$
$$\times\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_0(t_f-t_i)/\hbar} \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}x\, \varphi_0^*(x')\varphi_0(x) \left\langle x', t_f \middle| x, t_i \right\rangle_J \tag{1.50}$$

Si ahora tomamos $t_f = -t_i \to \infty$, de la expresión anterior obtenemos:

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J = \frac{\displaystyle\lim_{\substack{T_i\to-\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\\ T_f\to+\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}} \left\langle x_f, T_f \middle| x_i, T_i \right\rangle_J}{\displaystyle\lim_{\substack{T_i\to-\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\\ T_f\to+\infty\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}} \varphi_0(x_f)\varphi_0^*(x_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(T_f-T_i)/\hbar}} \tag{1.51}$$

pues $\langle x, t | E_0 \rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0 t/\hbar} \langle x | E_0 \rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0 t/\hbar}\varphi_0(x)$ y la segunda línea de (1.50) vale

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \equiv \lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to+\infty}} \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}x\, \left\langle E_0 \middle| x', t_f \right\rangle \left\langle x', t_f \middle| x, t_i \right\rangle_J \langle x, t_i | E_0 \rangle \ . \tag{1.52}$$

El denominador de (1.51) es simplemente un factor numérico. El numerador es el término importante y viene dado por (1.46) tomando un límite de tiempos complejos:

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \propto \lim_{\substack{T_i \to -\infty\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ T_f \to +\infty\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}} \int \mathcal{D}x \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{T_i}^{T_f} \mathrm{d}t \, (L + \hbar J x) \right\} . \tag{1.53}$$

Nótese que, en vez de hacer la *rotación de Wick*, podríamos haber aislado igualmente la contribución del estado fundamental añadiendo al hamiltoniano en (1.48) y en (1.49) un término $-\frac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon x^2$ con $\epsilon > 0$. Esto es equivalente a añadir $+\frac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon x^2$ a L, así que tenemos alternativamente

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \propto \int \mathcal{D}x \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \left(L + \hbar J x + \frac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon x^2 \right) \right\} \tag{1.54}$$

donde ahora los tiempos se integran sobre la recta real y tomamos $\epsilon \to 0^+$ al final para lograr nuestro propósito sin alterar el lagrangiano. Ésta es la *prescripción de Feynman*. De forma análoga hay que proceder si en vez de una partícula tenemos un campo.

Como comentario final es importante notar que la introducción de un término complejo apropiado en el lagrangiano hace posible que la integral de camino (1.42) sea *convergente*, lo que está relacionado con la ordenación temporal y la *causalidad*. Una versión simplificada del mismo tipo de integral es

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt} = \frac{\mathrm{i}}{z} \quad \text{si } \mathrm{Im}z > 0 \,, \tag{1.55}$$

que solamente es convergente si z tiene una parte imaginaria no nula y positiva, aunque sea pequeña.

En adelante, utilizaremos unidades naturales ($\hbar = 1$).

1.4.3 Derivadas funcionales y funcional generador

Empecemos definiendo (en cuatro dimensiones) la *derivada funcional*, $\delta/\delta J(x)$, a partir de

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x-y) \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int \mathrm{d}^4 y\, J(y)\phi(y) = \phi(x)\ . \tag{1.56}$$

Se trata de una generalización a funciones continuas de la regla para vectores,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_i\ . \tag{1.57}$$

Para hacer derivadas funcionales de funcionales más complicados basta con aplicar la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 y\, J(y)\phi(y) \right\} = \mathrm{i}\phi(x) \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 y\, J(y)\phi(y) \right\}\ . \tag{1.58}$$

Y si el funcional depende de derivadas de la función J, integramos por partes antes de hacer la derivada funcional:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int \mathrm{d}^4 y\, \partial_\mu J(y) V^\mu(y) = -\partial_\mu V^\mu(x)\ . \tag{1.59}$$

el objeto básico que necesitamos definir es el *funcional generador* de funciones de Green, $Z[J]$, que para la teoría de campos escalares es

$$\boxed{Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left[\mathcal{L} + J(x)\phi(x) \right] \right\}} \tag{1.60}$$

Nótese que $Z[0] = \int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$ describe transiciones vacío-vacío (1.39), sin fuentes, mientras que en $Z[J]$ hemos añadido al lagrangiano $\mathcal{L}$ un *término fuente* $J(x)\phi(x)$. Aunque no se escriba, en adelante *se supondrá implícitamente la prescripción de Feynman* para asegurar la convergencia, como hemos visto en el apartado anterior. Aplicando (1.58) es evidente que todas las funciones de Green se pueden generar a partir de $Z[J]$ tomando derivadas funcionales,

$$\boxed{G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}}{\int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}} \tag{1.61}$$

Conviene definir el funcional generador *normalizado* $\widehat{Z}[J] \equiv Z[J]/Z[0]$ de modo que

$$\widehat{Z}[J] \equiv \frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \mathrm{d}^4x_1 \cdots \mathrm{d}^4x_n \, G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \; . \tag{1.62}$$

Veremos que nos resultará muy útil también definir el funcional generador $W[J]$:

$$W[J] \equiv -\mathrm{i} \log \widehat{Z}[J] \; , \quad \widehat{Z}[J] \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}W[J]} \; , \tag{1.63}$$

que genera las *funciones de Green conectadas*, y el funcional *acción efectiva* a partir de la transformada de Legendre:

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int \mathrm{d}^4x \, J(x)\varphi(x) \; , \quad \varphi(x) \equiv \frac{\delta W}{\delta J(x)} \; , \tag{1.64}$$

que genera los *vértices propios de interacción*. También veremos que $W[J]$ y $\Gamma[\varphi]$ son los análogos a la energía libre y energía interna, respectivamente, en mecánica estadística.

1.4.4 Campo escalar libre

Consideremos ahora un campo escalar *libre* ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$). Entonces,

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - \mathrm{i}\epsilon)\phi^2 + J\phi \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \left[-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - \mathrm{i}\epsilon)\phi + J\phi \right] \right\} \ . \end{aligned} \tag{1.65}$$

Para calcular las funciones de Green pasemos al espacio de momentos,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \widetilde{\phi}(p) \ , \quad J(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \widetilde{J}(p) \tag{1.66}$$

y recordemos que

$$\int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+p')x} = (2\pi)^4 \delta^4(p + p') \ . \tag{1.67}$$

Entonces la exponencial queda

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{2}\widetilde{\phi}(-p)\left(p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon\right)\widetilde{\phi}(p)+\widetilde{J}(-p)\widetilde{\phi}(p)\right]\right\} \tag{1.68}$$

y la integral funcional puede reemplazarse por una integral sobre modos de Fourier, que podemos discretizar

$$\mathcal{D}\phi(x)\sim\prod_p\widetilde{\phi}(p) \tag{1.69}$$

Las constantes de proporcionalidad son irrelevantes, pues se cancelan en el cociente (1.61). Ahora usaremos la siguiente identidad para integrales gaussianas,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}y_i\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}y_iA_{ij}y_j+\sum_{i=1}^{N}z_iy_i\right\}\\ =(2\pi)^{N/2}(\det A)^{-1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}z_i(A^{-1})_{ij}z_j\right\}\end{aligned} \tag{1.70}$$

donde A_{ik} es una matriz invertible. Identificando términos, regresando al continuo y eligiendo la normalización $Z_0[0]=1$ obtenemos inmediatamente

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\,\widetilde{J}(-p)\widetilde{D}_F(p)\widetilde{J}(p)\right\} \tag{1.71}$$

donde

$$\widetilde{D}_F(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \tag{1.72}$$

es el *propagador de Feynman* en el espacio de momentos. Volviendo al espacio de coordenadas tenemos que, para campos escalares *libres*,

$$\boxed{Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, J(x)D_F(x-y)J(y)\right\}} \tag{1.73}$$

donde

$$D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\widetilde{D}_F(p)\ . \tag{1.74}$$

Comprobemos que el propagador se puede obtener aplicando (1.61) a (1.73),

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-\mathrm{i})^2}{Z_0[0]}\,\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} = D_F(x_1 - x_2)\ . \tag{1.75}$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
G_0^{(2)}(x_1,x_2) &= (-\mathrm{i})^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)\right\}\Bigg|_{J=0} \\
&= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y\, D_F(x_2-y)J(y) - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, J(x) D_F(x-x_2)\right] \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]}\Bigg|_{J=0} \\
&= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left[-\int \mathrm{d}^4x\, J(x) D_F(x-x_2)\right] \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]}\Bigg|_{J=0} \\
&= D_F(x_1-x_2)\ . \qquad (1.76)
\end{aligned}
$$

Nótese que al hacer la primera derivada se bajan dos términos, que hemos reagrupado. La segunda derivada da varios más, pero solamente cuando ésta actúa sobre el factor a la izquierda de $Z_0[J]$ obtenemos términos que sobreviven al tomar $J = 0$.

Del mismo modo podemos hallar el resto de las funciones de Green de la teoría de campos escalares libres. Hallemos como ejemplo la función de cuatro puntos. Para abreviar la *notación*, en adelante:

$$\boxed{\begin{array}{c} \phi_1 \equiv \phi(x_1)\ , \quad J_x \equiv J(x)\ , \quad D_{x4} \equiv D_F(x - x_4)\ , \quad \text{etcétera} \\ \text{y supondremos que se integra sobre los índices repetidos en cada bloque } \langle \ldots \rangle. \end{array}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-\mathrm{i})^4 \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \frac{\delta}{\delta J_3} \left[- \langle J_x D_{x4} \rangle \right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \left\langle J_x D_{xy} J_y \right\rangle} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \left[-D_{34} + \langle J_x D_{x4} \rangle \left\langle J_y D_{y3} \right\rangle \right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \left\langle J_x D_{xy} J_y \right\rangle} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} \left[D_{34} \langle J_x D_{x2} \rangle + D_{24} \left\langle J_y D_{y3} \right\rangle + \langle J_x D_{x4} \rangle D_{23} \right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \left\langle J_x D_{xy} J_y \right\rangle} \Big|_{J=0} \\ &= D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23}\ . \end{aligned} \tag{1.77}$$

Deducimos ya fácilmente que

$$G_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ si } n \text{ es impar} \tag{1.78}$$

y si n es par podemos expresarlas como productos de propagadores

$$G_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum D_F(x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots D_F(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) \tag{1.79}$$

donde la suma se extiende sobre todas las formas distintas de agrupar en pares el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Este resultado es el *teorema de Wick*, obtenido mediante integrales de camino.

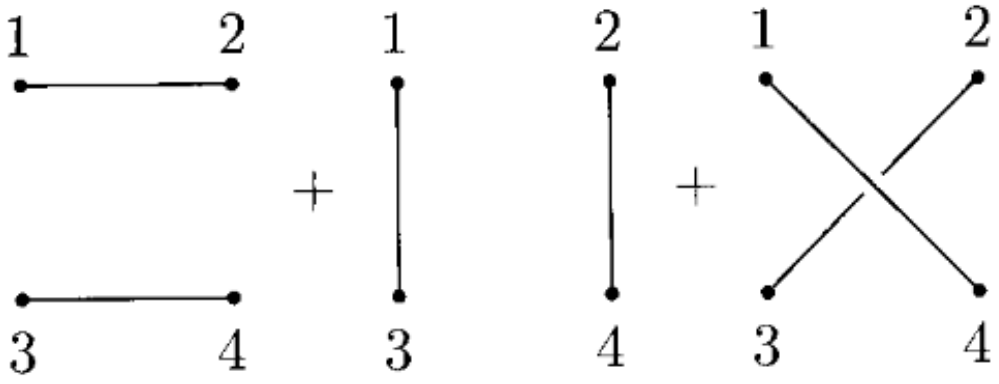
Las funciones de Green admiten una representación gráfica sencilla en términos de *diagramas de Feynman*. Así, el propagador de Feynman es:

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2) =$$

(1.80)

y todas las funciones de Green de la teoría libre se expresan como productos de propagadores, como por ejemplo:

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$



(1.81)

1.4.5 Interpretación en términos de partículas

El propagador de Feynman $D_F(x-y) = G_0^{(2)}(x,y)$ es, en efecto, una función de Green del operador de Klein-Gordon pues

$$(\Box_x + m^2)D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}(-p^2 + m^2)\mathrm{e}^{-p(x-y)} = -\mathrm{i}\delta^4(x-y) \quad (1.82)$$

Las condiciones de contorno está fijadas por la integral de camino y especificadas por la prescripción $\mathrm{i}\epsilon$ de Feynman. Por tanto, podemos interpretar $D_F(x-y)$ como la amplitud de probabilidad de que una *señal* se propague libremente desde y hasta x. Las posibles señales son las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \ . \quad (1.83)$$

Las soluciones son modos de *energía positiva* (*negativa*), $p^0 = \pm E_{\boldsymbol{p}}$ con $E_{\boldsymbol{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$, que llamamos *partículas* (*antipartículas*) de masa m,

$$\phi(x) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \quad (p^0 > 0) \ , \quad \phi(x) \sim \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \quad (p^0 < 0) \ . \quad (1.84)$$

Las partículas (antipartículas) se propagan hacia delante (atrás) en el tiempo. Hay de hecho dos maneras de propagar un número cuántico (una carga Q, por ejemplo) desde y hasta x: crear una partícula de carga Q en y y destruirla en x, o bien, crear una antipartícula con carga opuesta $-Q$ en x y destruirla en y. Nótese que, por definición, en el primer caso $x^0 > y^0$, y por tanto en el segundo $x^0 < y^0$. Si el campo es real ($\phi = \phi^*$) no distinguimos ambas señales, es decir, partículas y antipartículas coinciden.

Por tanto, el diagrama de Feynman que representa a $G_0^{(2)}(x_1, x_2)$ (1.80) expresa la propagación libre de una partícula entre dos puntos x_1 y x_2. Del mismo modo, la función de Green $G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (1.81) expresa las posibles transiciones libres de una partícula entre cuatro puntos. Nótese que éste último es un objeto bastante *desconectado*. De hecho, el espacio de posiciones no el marco más apropiado para describir la propagación de partículas con cuadrimomento p bien definido. Conviene por eso introducir la transformada de Fourier:

$$\int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)} G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \, . \tag{1.85}$$

Como las funciones de Green sólo dependen de diferencias $x_i - x_j$, debido a la invariancia bajo traslaciones, su transformada de Fourier sólo dependerá de $n-1$ momentos, pues será proporcional a $\delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ que implica $p_1 + \cdots + p_n = 0$. Por eso definiremos,

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \widetilde{G}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \equiv \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)} G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \, . \tag{1.86}$$

Así por ejemplo representaremos el propagador libre en el espacio de momentos mediante el diagrama

$$\widetilde{G}_0^{(2)}(p, -p) \equiv \widetilde{D}_F(p) = \xrightarrow{\quad p \quad} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \tag{1.87}$$

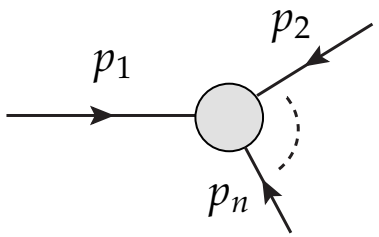
En efecto, haciendo el cambio de variables $x = x_1 + x_2$, $y = x_1 - x_2$,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1x_1+p_2x_2)} D_F(x_1-x_2) &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(p_1+p_2)x}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(p_1-p_2)y} D_F(y) \\
&= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\int \mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1y} D_F(y) \\
&= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{d}^4y\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p)y}\widetilde{D}_F(p) \\
&= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\widetilde{D}_F(p_1) \qquad (1.88)
\end{aligned}$$

donde se ha sustituido

$$(2\pi)^4\delta^4(k) = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ , \quad D_F(y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py}\widetilde{D}_F(p)\ . \qquad (1.89)$$

Veremos que en presencia de interacciones aparecerán también otras funciones de Green conectadas que representaremos en el espacio de momentos mediante diagramas de la forma

$\widetilde{G}^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) =$ 

(1.90)

Estas funciones de Green representan amplitudes de *scattering* de estados de momentos entrantes $p_1,\ldots,p_j$ a estados de momentos salientes $-p_{j+1},\ldots,-p_n$.