1.5 Campos en interacción. Teoría de perturbaciones

1.5.1 Funcional generador y funciones de Green

El funcional generador (1.60) nos permite encontrar las funciones de Green de una teoría de campos escalares arbitraria tomando derivadas funcionales (1.61). Hemos podido expresar después el funcional generador para la teoría libre ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$) de forma muy sencilla (1.73) en términos del propagador de Feynman, gracias a que las integrales son gaussianas (el lagrangiano es cuadrático en los campos) y las hemos podido calcular exactamente.

Consideremos ahora que exista una interacción, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, donde $\mathcal{L}_I = -V(\phi)$ es una función polinómica de los campos. Para manipular el funcional generador, usemos la notación abreviada introducida antes de (1.77) y la derivada funcional (1.58),

$$\phi_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle J\phi\rangle} = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_x}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle J\phi\rangle} \ . \tag{1.91}$$

Lo mismo vale para cualquier función de ϕ. Así que

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, V(\phi_x)\right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle J\phi\rangle} = \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, V\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_x}\right)\right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle J\phi\rangle}\ . \tag{1.92}$$

Este *truco* nos permite escribir

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, [\mathcal{L}_0 - V(\phi) + J\phi]\right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\, \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, V(\phi)\right\} \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, [\mathcal{L}_0 + J\phi]\right\} \\ &= \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, V\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_x}\right)\right\} Z_0[J] \\ &= \exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4z\, V\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)\right\} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} \end{aligned} \tag{1.93}$$

Esto nos abre las puertas a un tratamiento *perturbativo* de la interacción desarrollando en serie la exponencial de la izquierda. Tomaremos como ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$,

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \,. \tag{1.94}$$

Entonces

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 z\, V\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)\right\} = 1 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4 z\, \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2) \,. \tag{1.95}$$

A orden λ^0, $Z[J]$ es obviamente $Z_0[J]$. Hallemos el siguiente orden paso a paso:

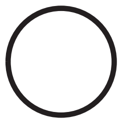
$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} = \mathrm{i}\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} \tag{1.96}$$

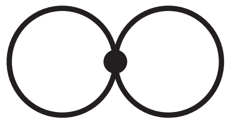
$$\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} = [D_F(0) - \left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} \tag{1.97}$$

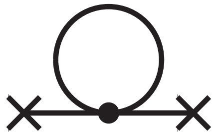
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)^3 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[-2\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle D_F(0) - \left(D_F(0) - \left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2\right)\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[-3\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle D_F(0) + \left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^3\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle}\end{aligned} \tag{1.98}$$

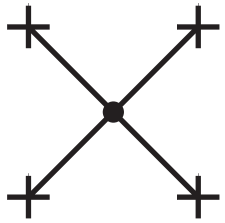
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_z}\right)^4 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} &= -\Big[-3D_F^2(0) + 3\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2 D_F(0) + 3\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2 D_F(0) \\
&\qquad\qquad - \left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^4\Big]\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle} \\
&= \Big[3D_F^2(0) - 6\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2 D_F(0) + \left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^4\Big]\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle}
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

Representado $D_F(0)$ mediante un *loop cerrado* e introduciendo también diagramas de Feynman con *fuentes* ($\times$) e *interacciones* en un punto ($\times\!\!\!\!\!\bullet$),

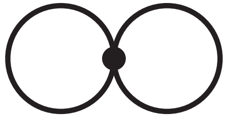
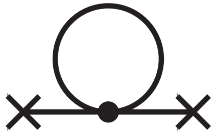
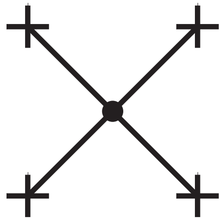
$D_F(0) =$ 

$D_F^2(0) =$ 

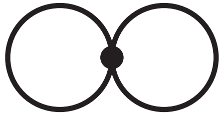
$\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^2 D_F(0) =$ 

$\left\langle J_x D_{xz}\right\rangle^4 =$ 

la expresión (1.93) a primer orden de teoría de perturbaciones queda:

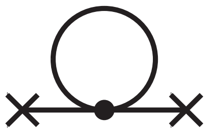
$$Z[J] = \left[1 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4 z \left(3 \right.\right.$$

$$- 6$$

$$+$$

$$\left.\left.\right)\right] \qquad (1.100)$$

Tomando ahora $J = 0$ eliminamos la contribución de los diagramas con patas externas:

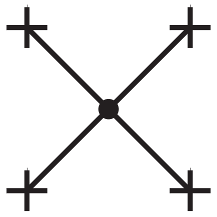
$$Z[0] = \left[1 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4 z \left(3 \right.\right.$$

$$\left.\left.\right)\right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \qquad (1.101)$$

Vemos, por tanto, que el diagrama de vacío no contribuye al funcional generador normalizado $\widehat{Z}[J]$, que es la cantidad relevante para hallar las funciones de Green (1.61):

$$\widehat{Z}[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]} = \left[1 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!} \int \mathrm{d}^4 z \left(-6 \right.\right.$$



$$+$$



$$\left.\left. \vphantom{\int} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y \rangle} \,. \tag{1.102}$$

De hecho puede demostrarse que los *diagramas de vacío* no contribuirán al funcional generador normalizado, y por tanto, *no contribuirán a las funciones de Green*, a todo orden en teoría de perturbaciones.

Ya podemos calcular las distintas funciones de Green a partir de (1.61) y (1.102):

Función de Green de dos puntos

Puesto que hay que tomar dos derivadas y luego hacer $J = 0$, a la función de Green de dos puntos solamente pueden contribuir los diagramas en (1.102) con un máximo de dos fuentes. Por tanto, a primer orden en teoría de perturbaciones:

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1,x_2) &= -\left.\frac{\delta^2 \widehat{Z}}{\delta J(x_1) J(x_2)}\right|_{J=0} \\
&= G_0^{(2)}(x_1,x_2) + \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}(-6) D_F(0)\ \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} \int \mathrm{d}^4 z\ \left.\langle J_x D_{xz}\rangle^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y\rangle}\right|_{J=0}
\end{aligned}
\tag{1.103}
$$

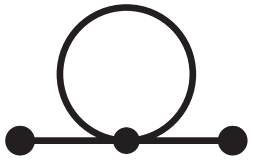
Hallando

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J_2}(\ldots) &= \int \mathrm{d}^4 z\ \left[2D_{2z}\langle J_x D_{xz}\rangle - \langle J_x D_{xz}\rangle^2 \langle J_x D_{x2}\rangle\right] \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y\rangle} \\
\left.\frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2}(\ldots)\right|_{J=0} &= \int \mathrm{d}^4 z\, 2 D_{1z} D_{2z}
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

tenemos el propagador libre (1.80) más una corrección,

$$
G^{(2)}(x_1,x_2) = D_F(x_1 - x_2) - \frac{\mathrm{i}\lambda}{2} D_F(0) \int \mathrm{d}^4 z\, D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) \tag{1.105}
$$

o diagramáticamente:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = $$  $$- \frac{i\lambda}{2} \int d^4 z$$  $$(1.106)$$

En el espacio de momentos, recordando (1.74) y (1.86), obtenemos el propagador libre (1.87) más una corrección:

$$\widetilde{G}^{(2)}(p,-p) = \widetilde{D}_F(p) - \frac{\mathrm{i}\lambda}{2} D_F(0)\widetilde{D}_F(p)\widetilde{D}_F(p) \tag{1.107}$$

donde se ha hecho el cambio de variables $z_1 = x_1 - z$, $z_2 = x_2 - z$ en

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1x_1+p_2x_2)}\mathrm{d}^4z\, D_F(x_1-z)D_F(x_2-z) \\ = \int \mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{d}^4z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1z_1+p_2z_2)}D_F(z_1)D_F(z_2) \\ = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\ .\end{aligned} \tag{1.108}$$

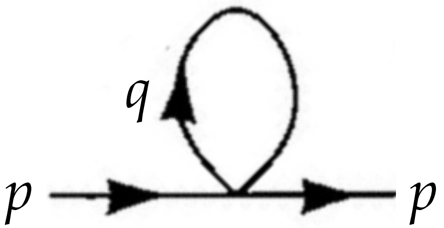
Introduciendo

$$-\mathrm{i}B \equiv -\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}D_F(0) = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\widetilde{D}_F(q)\ , \tag{1.109}$$

tenemos que

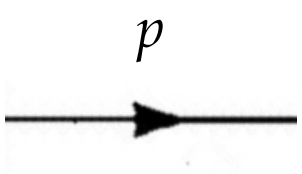
$$\widetilde{G}^{(2)}(p,-p) = \widetilde{D}_F(p) + \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{1.110}$$

Diagramáticamente la corrección se escribe como:

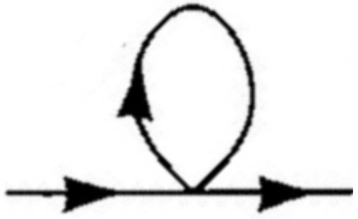


$$= \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) \tag{1.111}$$

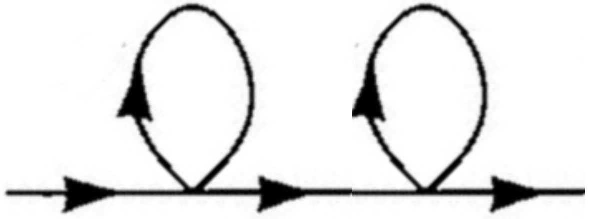
Podemos *resumar* todas correcciones de este tipo al propagador,



$+$



$+$



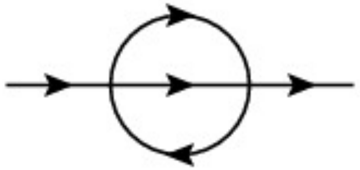
$+ \cdots$

$$\begin{aligned}
&= \widetilde{D}_F(p) + \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) + \widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p)(-\mathrm{i}B)\widetilde{D}_F(p) + \ldots \\
&= \widetilde{D}_F(p)\left[1 + (-\mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p)) + (-\mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p))^2 + \ldots\right] \\
&= \widetilde{D}_F(p)\frac{1}{1 + \mathrm{i}B\widetilde{D}_F(p)} = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{B}{p^2 - m^2}}\right) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 - B}\,,
\end{aligned} \tag{1.112}$$

y vemos que suponen una *corrección a la masa*,

$$m^2 \to m^2 + B \ . \tag{1.113}$$

Esta corrección (1.109) es de hecho *infinita*, y tiene que interpretarse mediante la *regularización* y *renormalización* de la teoría, según veremos.

A órdenes superiores hay también otras correcciones, como por ejemplo a $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 

(que, a diferencia de B, depende de p^2). Esto nos obligará a a definir la masa física m como el polo del propagador cuando $p^2 = m^2$.

Función de Green de cuatro puntos

El término de orden λ^0 nos da la función de Green de cuatro puntos de la teoría libre $G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (1.81). A orden λ tenemos dos contribuciones en (1.102) y ambas sobreviven a cuatro derivadas respecto a J cuando hacemos $J = 0$. La primera es:

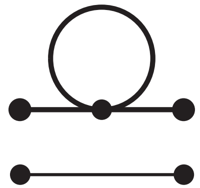
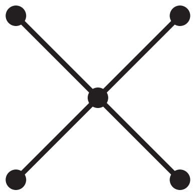
$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}(-6)D_F(0)\frac{\delta^4}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4}\int \mathrm{d}^4z\ \langle J_x D_{xz}\rangle^2 \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle}\bigg|_{J=0} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}(-6)(-2)D_F(0)\int \mathrm{d}^4z\,[D_{12}D_{3z}D_{4z} + D_{13}D_{2z}D_{4z} + D_{14}D_{2z}D_{3z} \\
&\qquad + D_{23}D_{1z}D_{4z} + D_{24}D_{1z}D_{3z} + D_{34}D_{1z}D_{2z}]\ .
\end{aligned} \tag{1.114}$$

La segunda contribución es:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\frac{\delta^4}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4}\int \mathrm{d}^4z\ \langle J_x D_{xz}\rangle^4 \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle J_x D_{xy} J_y\right\rangle}\bigg|_{J=0} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}24\int \mathrm{d}^4z\, D_{1z}D_{2z}D_{3z}D_{4z}\ .
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Diagramáticamente:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3 \Bigg($$

$$\Bigg) - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4!} \int \mathrm{d}^4 z \Bigg[12 \times 6 \Bigg($$

$$\Bigg) + 24$$

$$\Bigg] \qquad (1.116)$$

donde los diagramas entre paréntesis denotan cualquiera de las posibles combinaciones topológicamente equivalentes de los cuatro puntos, que son 3 en (1.81) y 6 en (1.114). Nótese que contiene diagramas desconectados, formados por la combinación de diagramas de dos puntos.

1.5.2 Funcional generador de diagramas conectados

Veamos ahora que el funcional generador $W[J]$ definido en (1.63) genera sólo funciones de Green conectadas,

$$-\mathrm{i}G_c^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \equiv (-\mathrm{i})^n \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} = (-\mathrm{i})^{n+1} \left.\frac{\delta^n \log Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{1.117}$$

con lo que también podemos construir $Z[J]$ a partir de objetos más simples mediante

$$\log Z[J] = \sum_n^\infty \frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\, G_c^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\;. \tag{1.118}$$

Lo comprobaremos para las funciones de dos y cuatros puntos:[g]

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J_1\delta J_2} = -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J_1}\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_2}\right) = \frac{\mathrm{i}}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J_1}\frac{\delta Z}{\delta J_2} - \frac{\mathrm{i}}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2} \tag{1.119}$$

Así que

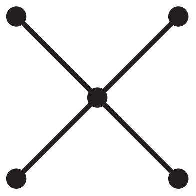
$$-\mathrm{i}G_c^{(2)}(x_1,x_2) = -\left.\frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2}\right|_{J=0} = \mathrm{i}\frac{1}{Z[0]}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = -\mathrm{i}G^{(2)}(x_1,x_2) \tag{1.120}$$

pues ya es una función de Green conectada. Y si seguimos derivando (1.119):

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \left.\frac{\delta^4 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4}\right|_{J=0} \\ &= \mathrm{i}\Big[G^{(2)}(x_1,x_2)G^{(2)}(x_3,x_4) + G^{(2)}(x_1,x_3)G^{(2)}(x_2,x_4) \\ &\qquad + G^{(2)}(x_1,x_4)G^{(2)}(x_2,x_3) - G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\Big]\end{aligned} \tag{1.121}$$

Sustituyendo los desarrollos en perturbativos de $G^{(2)}(x_1,x_2)$ (1.106) y $G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (1.116) es fácil darse cuenta de que los diagramas desconectados se cancelan y sólo sobrevive, a orden λ, el diagrama conectado:

$$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}24\int \mathrm{d}^4 z \tag{1.122}$$



como queríamos comprobar. En el espacio de momentos,

$$\widetilde{G}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\mathrm{i}\lambda \widetilde{D}_F(p_1)\widetilde{D}_F(p_2)\widetilde{D}_F(p_3)\widetilde{D}_F(p_4) \ . \tag{1.123}$$