1.6 Cuantización funcional de campos fermiónicos

En el formalismo canónico los campos son operadores que verifican reglas de anticonmutación:

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \; . \tag{1.182}$$

(En realidad no solamente lo hacen a tiempos iguales.) En el formalismo funcional los campos son números complejos. Para considerar campos fermiónicos tendremos que introducir cantidades complejas anticonmutantes: *variables de Grassmann*.

1.6.1 Variables de Grassmann

Los generadores θ_i del *álgebra de Grassmann* ($i = 1, \ldots, n$) obedecen:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \; . \tag{1.183}$$

Por tanto,

$$\theta_i^2 = 0 \tag{1.184}$$

y cualquier función $f(\theta_i)$ contendrá un número finito de términos, pues ha de ser lineal en las θ_i. Por ejemplo, para un álgebra unidimensional ($n = 1$),

$$f(\theta) = a + b\theta \; , \quad a, b \in \mathbb{C} \; . \tag{1.185}$$

Podemos introducir la *derivada* respecto a una variable de Grassmann a partir de

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_1\theta_2) = \delta_{i1}\theta_2 - \delta_{i2}\theta_1 \tag{1.186}$$

que cumple:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \theta_j\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j + \theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i} = \delta_{ij} - \theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i} = \delta_{ij} \tag{1.187}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\} = 0 \ . \tag{1.188}$$

Así, para un álgebra unidimensional:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}, \theta\right\} = 1 \ , \quad \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 = 0 \ . \tag{1.189}$$

Para introducir la *integral*, la invariancia bajo traslaciones requiere que

$$\int \mathrm{d}\theta\, \theta = \int \mathrm{d}\theta\, (\theta + \theta_0) \tag{1.190}$$

en analogía con la integración definida ordinaria sobre una función lineal $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x + x_0) \ . \tag{1.191}$$

Por tanto,

$$\int \mathrm{d}\theta = 0 \,, \quad \int \mathrm{d}\theta \, \theta = 1 \tag{1.192}$$

donde hemos normalizado la integral de modo que

$$\int \mathrm{d}\theta \, f(\theta) = \int \mathrm{d}\theta \, (a + b\theta) = b \,. \tag{1.193}$$

Recordemos que también teníamos

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(a + b\theta) = b \,. \tag{1.194}$$

Así que derivación e integración coinciden! Nótese también que, si integramos respecto a varias variables de Grassmann el orden es importante porque

$$\mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}\theta_j = -\mathrm{d}\theta_j \mathrm{d}\theta_i \,. \tag{1.195}$$

Vamos ahora a trabajar con dos variables de Grassmann independientes, η y $\bar{\eta}$, de modo que

$$\int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta} = 0 \,, \quad \int \mathrm{d}\eta \, \eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta} \, \bar{\eta} = 1 \,. \tag{1.196}$$

Como $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, tenemos que

$$\mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta \tag{1.197}$$

y, por tanto

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = 1 \, . \tag{1.198}$$

Para generalizar esta fórmula a más dimensiones comencemos con dos dimensiones:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \, , \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \, . \tag{1.199}$$

(Al final vamos a necesitar un número infinito de ellas, $\eta(x)$ y $\bar{\eta}(x)$) Hemos elegido el vector $\bar{\eta}$ como un vector fila para que

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \tag{1.200}$$

y entonces

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \tag{1.201}$$

$$\mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \tag{1.202}$$

y aplicando las reglas de integración,

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta \, \mathrm{e}^{-\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\bar{\eta}_1\mathrm{d}\bar{\eta}_2\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 \, \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = 1 \tag{1.203}$$

como en el caso unidimensional.

Ahora veamos el efecto de un cambio de variables:

$$\eta = M\alpha \ , \quad \bar{\eta} = \bar{\alpha} N \tag{1.204}$$

donde M y N son matrices 2×2 y α y $\bar{\alpha}$ son dos nuevas parejas de variables de Grassmann independientes. Primero comprobemos que, si bien para variables ordinarias el cambio de variables supondría multiplicar por un jacobiano:

$$x = My \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = (\det M)\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_1 \tag{1.205}$$

en el caso de variables de Grassmann se obtiene:

$$\eta = M\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\eta_2 = (\det M)^{-1}\, \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \ . \tag{1.206}$$

En efecto, como

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 &= (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) \\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 \\ &= (\det M)\, \alpha_1 \alpha_2 \ , \end{aligned} \tag{1.207}$$

para lograr que se preserve la integral:

$$1 = \int \mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\eta_2\, \eta_1 \eta_2 = \int \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2\, \alpha_1 \alpha_2 \tag{1.208}$$

tenemos que imponer (1.206). Entonces, volviendo a nuestra integral (1.203),

$$1 = (\det NM)^{-1} \int \mathrm{d}\bar{\alpha} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{-\bar{\alpha} N M \alpha} \ . \tag{1.209}$$

Así que si $A \equiv NM$ obtenemos

$$\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \, \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A \; . \tag{1.210}$$

Este resultado nos será muy útil en el caso infinito-dimensional para cuantizar funcionalmente los campos de gauge.

Lo que nos interesa para tratar campos fermiónicos es un *álgebra de Grassmann infinito-dimensional*, cuyos generadores $\theta(x)$ obedecen:

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = 0 \; , \tag{1.211}$$

$$\frac{\partial\theta(x)}{\partial\theta(y)} = \delta^4(x-y) \; , \tag{1.212}$$

$$\int \mathrm{d}\theta(x) = 0 \; , \quad \int \mathrm{d}\theta(x)\, \theta(x) = 1 \; . \tag{1.213}$$

Los campos fermiónicos $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ son variables de Grassmann independientes, igual que α y $\bar{\alpha}$ en el caso anterior, y las integrales como (1.210) son integrales funcionales.

1.6.2 Funcional generador y funciones de Green

Por analogía con el caso de campos escalares, recordando que el lagrangiano libre de Dirac es

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{1.214}$$

definimos el funcional generador para el campo de Dirac libre como

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\;[\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]\right\} \tag{1.215}$$

donde $\bar{\eta}(x)$ representa a la fuente de $\psi(x)$ y $\eta(x)$ representa a la fuente de $\bar{\psi}(x)$.

Para simplificar la expresión conviene introducir la notación:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, Q(\bar{\psi},\psi)\right\} \tag{1.216}$$

$$Q(\bar{\psi},\psi) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\;, \quad S^{-1} = \mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m\;. \tag{1.217}$$

Usando los valores ψ_m y $\bar{\psi}_m$ que minimizan $Q(\bar{\psi}, \psi)$,

$$\psi_m = -S\eta \ , \quad \bar{\psi}_m = -\bar{\eta} S \tag{1.218}$$

es fácil mostrar que

$$Q(\bar{\psi}_m, \psi_m) \equiv Q_m = -\bar{\eta} S \eta \tag{1.219}$$

$$Q(\bar{\psi}, \psi) = Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m) \ . \tag{1.220}$$

Entonces

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \ \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \left[-\bar{\eta} S \eta + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m) \right] \right\}$$

$$= \det(-\mathrm{i}S^{-1}) \exp\left\{ -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \, \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right\} \ ,$$

donde se ha extraído fuera de la integral funcional el segundo término de la exponencial y se ha usado (1.210) extendida a infinitas dimensiones con $A = -\mathrm{i}S^{-1}$. Este factor puede absorberse en la normalización de la integral funcional de modo que $Z_0[0,0] = 1$. Veamos qué significa extender (1.210) a un número infinito de dimensiones. Se trata de pasar de un vector α con componentes α_i a una función $\alpha(x)$, de modo que

$$\alpha_i \to \alpha(x) \tag{1.222}$$

$$\sum_i \alpha_i \to \int \mathrm{d}^4x\, \alpha(x) \tag{1.223}$$

$$\bar{\alpha}\alpha = \sum_i \bar{\alpha}_i \alpha_i = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \delta_{ij} \alpha_j \to \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y\, \bar{\alpha}(x) \delta^4(x-y) \alpha(y) = \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\alpha}(x)\alpha(x) \tag{1.224}$$

$$\bar{\alpha}M\alpha = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i M_{ij} \alpha_j \to \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y\, \bar{\alpha}(x) M(x,y) \alpha(y) \equiv \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\alpha}M\alpha \,, \tag{1.225}$$

ya que podemos escribir

$$\alpha_i = \sum_j \delta_{ij}\alpha_j \to \alpha(x) = \int \mathrm{d}^4y\, \delta^4(x-y)\alpha(y) \tag{1.226}$$

$$(M\alpha)_i = \sum_j M_{ij}\alpha_j \to (M\alpha)(x) = \int \mathrm{d}^4y\, M(x,y)\alpha(y) \,. \tag{1.227}$$

Finalmente, si escribimos:

$$S_F(x) = \mathrm{i}S(x) \ , \quad S^{-1} = \mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m \ . \tag{1.228}$$

obtenemos una expresión análoga a (1.73):

$$\boxed{Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right\}} \tag{1.229}$$

Veamos que

$$\boxed{S_F(x) = (\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + m)D_F(x) \ , \quad D_F(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}} \tag{1.230}$$

En efecto, recordando (1.82):

$$S^{-1}S = (\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)(-\mathrm{i}S_F) = (\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + m)(-\mathrm{i}D_F) = \mathrm{i}(\Box + m^2)D_F(x) = \delta^4(x) \ . \tag{1.231}$$

Por tanto, en el espacio de momentos:

$$\boxed{\widetilde{S}_F(p) = \frac{\mathrm{i}(p\!\!\!/ + m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{p\!\!\!/ - m + \mathrm{i}\epsilon}} \tag{1.232}$$

Es muy *importante* notar que, aunque para escalares $\widetilde{D}_F(p) = \widetilde{D}_F(-p)$, para fermiones $\widetilde{S}_F(p) \neq \widetilde{S}_F(-p)$.

Podemos encontrar las funciones de Green tomando derivadas del funcional generador respecto de las fuentes:

$$\langle 0| \, T\{\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)\}\,|0\rangle = \frac{(-\mathrm{i})^{2n}}{Z[0,0]}\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta}{\delta\eta(y_i)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_i)}Z[\eta,\bar{\eta}]\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \tag{1.233}$$

donde solamente sobreviven el mismo número de derivadas respecto a η y $\bar{\eta}$ cuando al final hacemos $\eta = \bar{\eta} = 0$. Usando nuestra notación abreviada, comprobemos que recuperamos que el propagador es la función de Green de dos puntos para el campo libre:

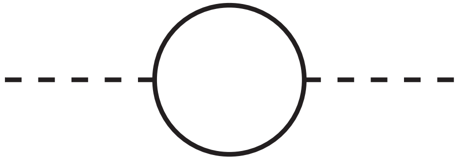
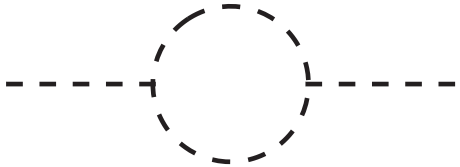
$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= -\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}Z_0[\eta,\bar{\eta}] = -\,\frac{\delta}{\delta\eta_y}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_x}\mathrm{e}^{-\langle\bar{\eta}_1 S_{12}\eta_2\rangle}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= -\,\frac{\delta}{\delta\eta_y}\left[-\,\langle S_{x2}\eta_2\rangle\,\mathrm{e}^{-\langle\bar{\eta}_1 S_{12}\eta_2\rangle}\right]\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} = S_{xy}\;. \end{aligned} \tag{1.234}$$

Nótese que, aunque no los hayamos escrito explícitamente, los campos fermiónicos y las fuentes llevan un índice espinorial $\alpha = 1, \ldots, 4$ y el propagador lleva dos.

Si los campos fermiónicos sufren interacciones, $\mathcal{L}_I(\bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0$, podemos generalizar (1.93) y escribir:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right\} Z_0[\eta, \bar{\eta}] \tag{1.235}$$

donde $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ viene dado por (1.229). Un resultado importante que se puede mostrar es que un loop cerrado de fermiones contribuye con *signo contrario* que uno de escalares. Pruébese comparando los siguientes diagramas para interacciones $\bar{\psi}\psi\phi$ y ϕ^3, respectivamente:

 $= -$  (1.236)