

# Introducción a las correcciones radiativas

## 7.1 Correcciones cuánticas: *Loops*

En esta sección veremos que el desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento, que hemos introducido en el tema anterior, es también un desarrollo en potencias de  $\hbar$ , es decir, en efectos cuánticos.<sup>a</sup> Para comprobarlo, reinsertaremos las constantes  $\hbar$ , manteniendo aún un sistema de unidades en el que  $c = 1$ . En este sistema longitudes y tiempos tienen las mismas dimensiones y lo mismo ocurre con energías y momentos. Sin embargo, longitudes y energías no tienen dimensiones inversas, lo que sí ocurre en el sistema de unidades en el que  $\hbar = 1$ . Recordemos que

$$\hbar \approx 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \quad (7.1)$$

así que  $\hbar$  tiene dimensiones de energía (o momento) por tiempo (o longitud).

Hay dos fuentes principales de potencias de  $\hbar$  en el proceso de cuantización. La primera está en las relaciones de conmutación (o anticonmutación). Por ejemplo, en el caso escalar habría que reemplazar

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\hbar\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) . \quad (7.2)$$

Repitiendo los pasos necesarios para calcular el propagador de Feynman obtenemos entonces que cada propagador incluye una potencia de  $\hbar$ :

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} , \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0^+ . \quad (7.3)$$

El segundo lugar en el que tenemos que introducir explícitamente una potencia de  $\hbar$  es el vértice de interacción. La razón es que el producto  $Ht$  (acción), donde  $H$  es un hamiltoniano y  $t$  el tiempo, tiene las dimensiones de  $\hbar$  y por tanto en el operador evolución aparece con un factor  $1/\hbar$  para que el argumento de la exponencial sea adimensional.

---

<sup>a</sup> Históricamente se ha llamado correcciones radiativas a las correcciones cuánticas, porque se calcularon en primer lugar para sistemas atómicos en procesos donde se emite o se absorbe radiación electromagnética.

Por ejemplo, el campo en

el picture de interacción

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) \equiv e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (7.4)$$

y así sucesivamente. Siendo cuidadosos con los factores de  $\hbar$  obtenemos que la teoría de perturbaciones toma la forma final


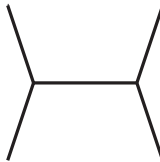
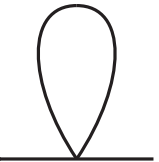

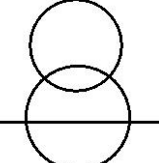
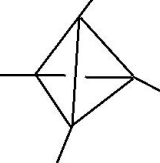
$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) / \hbar \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) / \hbar \right] \right\} | 0 \rangle}. \quad (7.5)$$

Al desarrollar en serie las exponenciales obtendremos que por cada vértice de nuestra teoría de perturbaciones tenemos que añadir una potencia de  $1/\hbar$ .

Con estas dos reglas, cada propagador introduce una potencia de  $\hbar$  y cada vértice una de  $\hbar^{-1}$ , podemos discutir la relación entre el número de *loops* y el de potencias de  $\hbar$  en un diagrama de Feynman conexo amputado arbitrario. Podemos definir el número de *loops* como el número  $L$  de cuadrimomentos no fijados por la regla de conservación del momento sobre los que tenemos que integrar para calcular el resultado de la amplitud correspondiente. Así, en un diagrama con  $I$  líneas internas y  $V$  vértices tenemos

$$L = I - (V - 1) = I - V + 1. \quad (7.6)$$

En efecto, tenemos  $I$  cuadrimomentos circulando por las líneas internas, sobre los que imponemos  $V - 1$  restricciones (una por cada vértice, excepto la global que corresponde a conservación del cuadrimomento total). Veamos algunos ejemplos:

	$L = 0 - 1 + 1 = 0$		$L = 1 - 2 + 1 = 0$	
	$L = 1 - 1 + 1 = 1$		$L = 2 - 2 + 1 = 1$	$(7.7)$
	$L = 7 - 4 + 1 = 4$		$L = 6 - 4 + 1 = 3$	

Nótese que normalmente  $L$  coincide con el número de lazos en el diagrama de Feynman. Pero no siempre, como se ve en el último ejemplo, en el que hay 4 lazos pero  $L = 3$ .

Aplicando ahora que cada propagador conlleva una potencia de  $\hbar$  y cada vértice una de  $\hbar^{-1}$  vemos que un diagrama conexo amputado con  $L$  *loops* es de orden  $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$ . Por tanto, el desarrollo en *loops* corresponde a un desarrollo en potencias de  $\hbar$ .

Puede sorprender sin embargo que el primer término del desarrollo perturbativo sea proporcional  $\hbar^{-1}$ , pero esto se debe a que hemos normalizado la acción dividiendo

por  $\hbar$  por argumentos dimensionales, de manera que debemos descontar ese factor y concluir que realmente la contribución de cero *loops* (orden  $\hbar^0$ ) corresponde al límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ).

Otro comentario importante es que en teorías con un único acoplamiento, el desarrollo perturbativo en ese acoplamiento y el desarrollo en *loops* coinciden, si fijamos el número de patas externas. La razón es que en ese caso existe una relación entre  $L$  y  $V$ . Por ejemplo, en la teoría  $\lambda\phi^4$  cada vértice tiene cuatro patas, así que

$$4V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V - E/2 + 1, \quad (7.8)$$

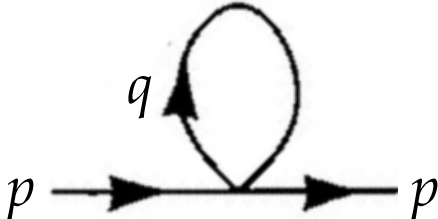
siendo  $E$  el número de patas externas e  $I$  el de líneas internas. Esta relación viene de que  $4V$  es el número total de líneas que confluyen en vértices, pero las que corresponden a líneas internas cuentan dos veces. Es fácil comprobar que esta relación se cumple en todos los ejemplos de (7.7), excepto para el primero de la columna de la derecha, en el que los vértices tienen tres patas, pues corresponden a una teoría  $\lambda\phi^3$  y la relación es entonces

$$3V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad L = I - V + 1 = V/2 - E/2 + 1 . \quad (7.9)$$

## 7.2 Divergencias ultravioletas

El hecho de que los cálculos a uno o más *loops* involucren una integración sobre momentos, cuyos módulos van de cero hasta infinito, conduce a una intrigante propiedad de la teoría cuántica de campos: la posible aparición de divergencias en los cálculos perturbativos. El origen y naturaleza de estas divergencias es diverso y su estudio da lugar a algunos de los aspectos más interesantes de la teoría cuántica de campos, como el grupo de renormalización. En este curso nos vamos a limitar a hacer una breve introducción a algunos de estos fenómenos, poniendo énfasis en la realización de cálculos explícitos.

Veamos en un ejemplo concreto cómo aparecen algunas de estas divergencias. Tomemos de nuevo la teoría  $\lambda\phi^4$  y calculemos el diagrama amputado


$$-iB = \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} . \quad (7.10)$$

Esta integral puede abordarse más fácilmente en el espacio Euclídeo, haciendo el cambio de variables  $q^0 = iq_E^0$  (rotación de Wick), manteniendo  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_E$  y por tanto sustituyendo  $q^2 = -q_E^2$ . De esta forma la integral factoriza en el producto de una integral angular en cuatro dimensiones por una integral sobre la coordenada radial  $q_E$  entre cero e infinito (estudiaremos en detalle este procedimiento en un número arbitrario de dimensiones en la sección §7.3):

$$B = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E q_E^3 \frac{1}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2}. \quad (7.11)$$

La integral resultante es divergente. Para poder dar sentido al resultado *regularizaremos* la integral para aislar la divergencia. En esta ocasión usaremos como *regulador* un *cut-off*

en momentos, es decir, integraremos hasta un valor finito  $\Lambda$  que al final haremos tender a infinito. Haciendo esto tenemos

$$B = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dq_E \frac{q_E^3}{q_E^2 + m^2} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left( \Lambda^2 + m^2 \ln \frac{m^2}{m^2 + \Lambda^2} \right). \quad (7.12)$$



Vemos por tanto que este diagrama presenta una *divergencia ultravioleta*, es decir, en el límite de momento infinito. En ocasiones un diagrama puede también tener divergencias infrarrojas (en el límite de momento cero).

En el resto de este tema veremos cómo clasificar, regularizar e interpretar las divergencias ultravioletas que aparecen en cálculos a nivel de uno o más *loops* en teoría cuántica de campos.

El comportamiento ultravioleta de un diagrama se puede caracterizar por su *grado superficial de divergencia*,  $D$ , que se define como la diferencia entre el número de potencias del momento de integración en el numerador menos las del denominador. En teorías en las que los vértices no dependen del momento, el grado superficial de divergencia depende del número de *loops* (potencias positivas del momento) y del número y tipo de propagadores (potencias negativas del momento, simples para fermiones, dobles para bosones). Así por ejemplo tenemos

$$\lambda\phi^n \ (n \geq 3) \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I \quad (7.13)$$

$$\text{QED} \quad \Rightarrow \quad D = 4L - 2I_\gamma - I_f \quad (7.14)$$

donde  $I_{\gamma,f}$  se refiere al número de líneas internas fotónicas y fermiónicas, respectivamente. En general, un diagrama divergerá logarítmicamente, linealmente, cuadráticamente y así sucesivamente para  $D \geq 0$ , aunque esto es *condición necesaria pero no suficiente*, pues hay excepciones a esta regla. Antes, reescribamos  $D$  de una manera más útil en términos del número de patas externas y vértices. La expresión depende de la teoría en cuestión. Estudiemos cada caso por separado.

### 7.2.1 $\lambda\phi^n$

En este caso (7.13) conduce a

$$D = 4L - 2I = (n - 4)V - E + 4, \quad (7.15)$$

donde hemos usado las relaciones

$$L = I - V + 1, \quad nV = E + 2I. \quad (7.16)$$

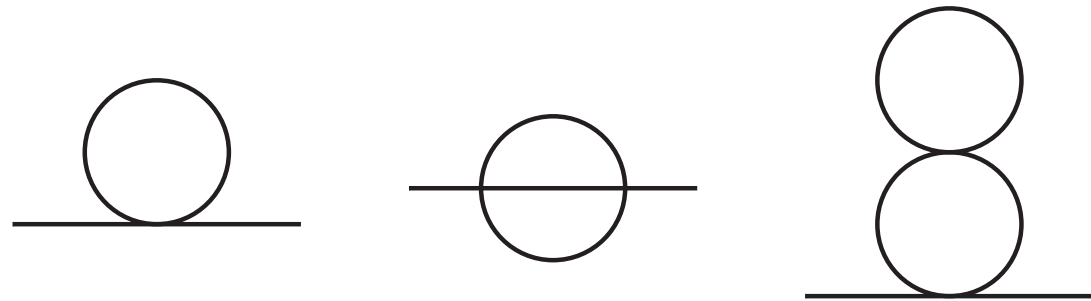
Vemos que cuanto mayor es el número de patas externas, a igual número de vértices, menor es  $D$ . Tenemos pues un número finito de posibles diagramas divergentes ( $D \geq 0$ ), llamados *divergencias primitivas*. Veamos cuáles son en el caso de  $\lambda\phi^4$  ( $n = 4$ ), es decir

$$D = 4 - E \geq 0. \quad (7.17)$$

Nótese que en este caso  $E$  es siempre par.

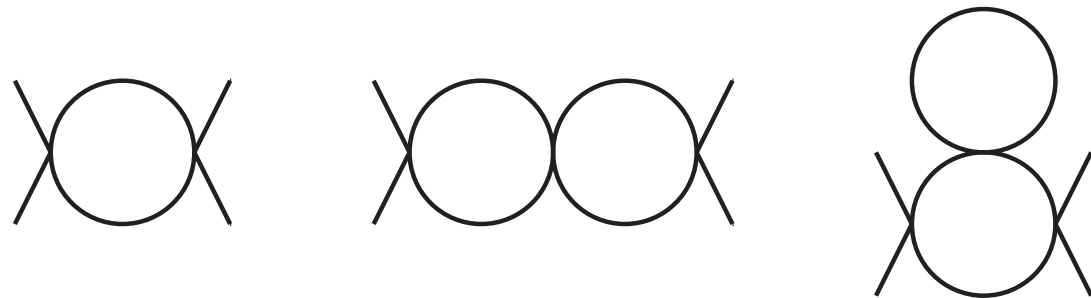
- $E = 0$ : Los diagramas vacío-vacío Son cuárticamente divergentes ( $\propto \Lambda^4$ ) y contribuyen a la *energía del vacío*, pero no son relevantes para hallar las amplitudes de scattering pues se cancelan en la fórmula LSZ.

- $E = 2$ : Las funciones de Green de dos puntos. Son cuadráticamente divergentes ( $\propto \Lambda^2$ ) y contribuyen a la *autoenergía del campo*:



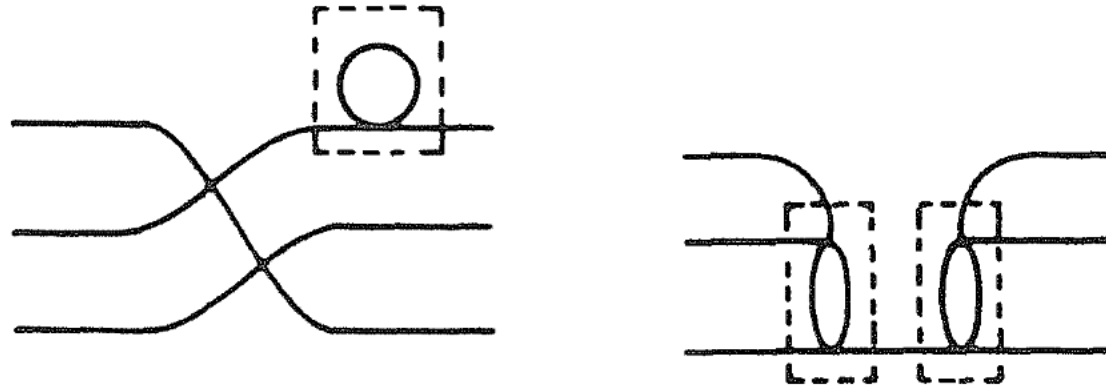
... (7.18)

- $E = 4$ : Las funciones de Green de cuatro puntos. Son logarítmicamente divergentes ( $\propto \ln \Lambda$ ) y contribuyen a la *corrección al vértice*:



... (7.19)

Podría pensarse que diagramas con  $D < 0$ , es decir  $E \geq 6$  son finitos, pero esto solamente es cierto si no contienen subdiagramas divergentes (con  $E = 2$  o  $E = 4$ ). Por ejemplo, los siguientes diagramas con  $D = -2$  ( $E = 6$ ) son divergentes:



(7.20)

En realidad, para que un diagrama sea finito, su grado superficial de divergencia  $D$  y el de todos sus subdiagramas debe ser negativo (teorema de Weinberg).

Vemos por tanto que en la teoría  $\lambda\phi^4$  hay un *número finito de divergencias primitivas* (dos en este caso) que afectan a la predicción de nuestros observables: la autoenergía del campo y la corrección al vértice. Cuando esto ocurre la teoría es *renormalizable* que, como veremos, quiere decir que podemos reabsorber todos los infinitos que aparezcan con un número finito de medidas, estando el resto de predicciones de la teoría bien definidas. Este proceso de reabsorber infinitos se denomina *renormalización* y lo discutiremos brevemente más adelante, en el caso de la QED.

La teoría  $\lambda\phi^3$  también tiene un número finito de divergencias primitivas, pues en este caso  $D = 4 - E - V$ . Al aumentar el número de patas externas, independientemente del número de vértices, llegaremos a  $D < 0$ . Pero, además, en este caso ocurre que diagramas con el mismo número de patas externas son cada vez más convergentes haciéndose finitos a partir de un número determinado de *loops*. Este tipo de teorías se llaman *super-renormalizables*.

Teorías  $\lambda\phi^n$  con  $n > 4$ , por el contrario, son *no renormalizables* puesto que, cualquiera que sea el número de patas externas de un diagrama,  $D$  siempre será positivo para un número suficientemente alto de vértices. Esto quiere decir que hay un número infinito de divergencias primitivas, que requerirían un número infinito de medidas para ser reabsorbidas.

El hecho de que  $\lambda\phi^n$  con  $n \leq 4$  sean teorías renormalizables es un ejemplo del *criterio de renormalizabilidad* que establece que un lagrangiano de interacción cuyos coeficientes (constantes de acoplamiento) tengan dimensiones de masa elevada a una potencia positiva o nula (adimensionales) es renormalizable. En nuestro ejemplo, como  $[\mathcal{L}] = M^4$  y  $[\phi] = M$ , las constantes tienen dimensiones  $[\lambda] = M^{4-n}$ . Podemos entender el criterio de renormalizabilidad del siguiente modo: si cada vértice de interacción introduce un acoplamiento con dimensiones de masa negativas entonces, por argumentos dimensionales, éste debe compensarse con algún otro parámetro con dimensiones positivas de masa (por ejemplo el *cut-off*  $\Lambda$ ) si no hay cancelaciones debidas a alguna simetría. En tal caso habrá un número indeterminado de funciones de Green que serán divergentes cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$  y por tanto no podremos reabsorber todos los infinitos en un número finito de medidas.

Hemos visto ejemplos (7.20) en los que  $D$  puede ser negativo y aún así el diagrama es divergente. Pero también puede ocurrir lo opuesto: diagramas con grado superficial de divergencia positivo, y por tanto a priori divergentes, que den un resultado finito. Esto es debido a la presencia de simetrías que reducen el grado de divergencia de algunos diagramas. Esto es lo que ocurre en QED, como veremos a continuación.