Renormalización de $\lambda\phi^4$

Para llevar a cabo este programa de renormalización seguiremos los siguientes pasos:

1. *Identificar* los diagramas de Feynman que contribuyen divergentemente a la amplitud de probabilidad. Veremos que mediante un sencillo *cálculo de potencias* podemos clasificar el *grado superficial de divergencia* de un diagrama.

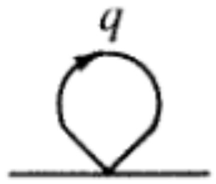
2. *Regularizar* estas divergencias. Para ello estudiaremos varios métodos de regularización que en general conllevarán la introducción de parámetros adicionales en la teoría. Estos parámetros nos permiten cuantificar la sensibilidad de la teoría a diferentes escalas de energía. En el límite, cuando estos parámetros se anulan la teoría será divergente.

3. *Renormalizar*: absorber las divergencias en una redefinición de las magnitudes físicas o mediante la adición de contratérminos al Lagrangiano.

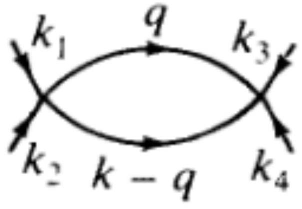
4. *Grupo de Renormalización*: las magnitudes físicas quedan en función de la escala arbitraria introducida en la regularización. El grupo de renormalización nos informa de que estos parámetros adicionales no son libres sino que son funciones de las constantes de acoplamiento. Por tanto acabamos proporcionando resultados finitos bien definidos en una teoría sin parámetros arbitrarios adicionales.

el término $\Delta_F(0)$, que contiene
una cuarta potencia de q en el numerador y un cuadrado en el denominador: la integral diverge cuadráticamente.

$$\Delta_F(0) = \lambda \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2}$$



$$\lambda^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(k_1 + k_2 - q)^2 - m^2]}$$



$$\sim \lambda^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^{12}} \frac{1}{q^6}$$

Regularización.

De los métodos de regularización más conocidos quizá el mas intuitivo sea el de introducir un *cut-off* en las integrales de momento, realizando la integración hasta un parámetro Λ. Para la integral divergente

$$\lambda \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \quad \longrightarrow \quad \lambda \int_0^{\Lambda^2} \frac{dq^2}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{q^2 - m^2} = \frac{\lambda m^2}{32\phi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(m^4/\Lambda^2).$$

No obstante a primera vista parece un método un tanto artificial y tiene la desventaja de romper la invariancia gauge y Poincaré dado que imponer un cut-off de momento es equivalente a discretizar el espacio (retículo). Además este método no es práctico para correcciones superiores a un ***loop***

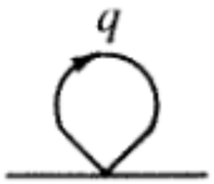
Regularización dimensional.

Comenzamos generalizando el Lagrangiano de la teoría ϕ^4, a d dimensiones. Dado que ϕ y $\mathcal{L}$ tiene dimensiones $d/2-1$ y d respectivamente, λ es adimensional en cuatro dimensiones. Para mantenerla adimensional, introducimos un *parámetro de masa arbitrario*, μ, tal que,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda\mu^{4-d}}{4!}\phi^4.$$

Ahora usamos las reglas de Feynman correspondientes para calcular el propagador corregido a orden λ, donde el 1/2 es un factor de simetría. Ahora nos ponemos esotéricos, la solución a esta

$$\frac{1}{2}\lambda\mu^{4-d}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2-m^2}$$



integral se obtiene en términos de la función Gamma,

$$-\frac{i\lambda}{32\pi^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2}\right)^{2-d/2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right).$$

Como podemos ver en la figura 1 la función Gamma tiene polos en cero y en los enteros negativos por tanto vemos que la divergencia de la integral se manifiesta como un simple polo a medida que $d \to 4$. Además sabemos

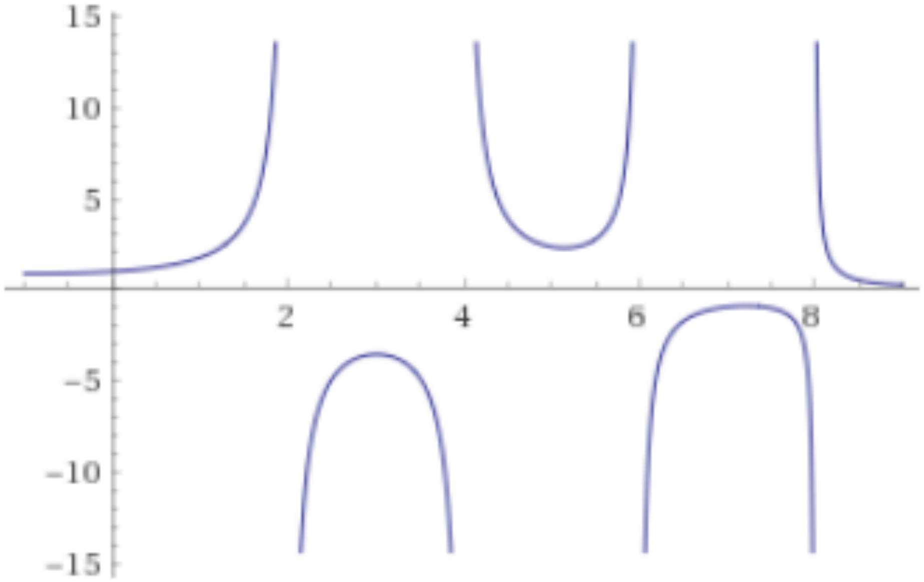


Figura 1: $\Gamma(1-d/2)$, WolframAlpha.

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon)\right],$$

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma,$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

donde $\gamma = \psi_1(1) = 0{,}577$, es la constante de Euler-Mascheroni. Haciendo que $d = 4 - \epsilon$ y sustituyendo para $n = 1$

$$\Gamma(1 - d/2) = \Gamma(-1 + \epsilon/2) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \cdots$, expandir en torno a $d = 4$ produce,

$$\begin{aligned} -\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon)\right]\left[1 + \frac{\epsilon}{2}\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2}\right)\right] = \\ = \frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon} + \underbrace{\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\left[1 - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-m^2}\right)\right] + O(\epsilon).}_{\text{finito}} \end{aligned}$$

Como vemos, hemos obtenido un resultado en el que la divergencia original ha sido convertida en un polo ($d \to 4 \implies \epsilon \to 0$), no obstante, vemos que el término finito depende del parámetro de masa arbitrario que hemos introducido al inicio.

Por último escribimos la correspondiente función vértice (1PI) $\Gamma^{(2)}(p)$.

a primer orden en λ, $$\Sigma = -\frac{\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon},$$

donde hemos obviado el término finito. Como vimos

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p) = p^2 - m^2\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}\right).$$

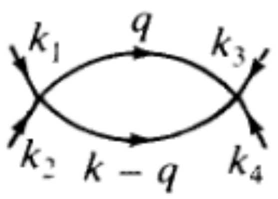
Esta expresión es claramente infinita en el límite $\epsilon \to 0$. Esto es porque aún no hemos absorbido la divergencia en una redefinición de los parámetros, simplemente la hemos aislado.

Vamos ahora con la regularización dimensional de la corrección a un *loop* de la función de 4-puntos

Utilizando la siguiente fórmula, empleada en lo que se conoce como *parametrización de Feynman*,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2},$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2)^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(k-q)^2 - m^2]}$$



podemos expresar la integral de la figura

$$\frac{1}{2}\lambda^2\mu^{2(4-d)} \int_0^1 dz \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 - m^2 + k^2 z(1-z)]^2}.$$

Ahora la integral está en la forma de

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 + 2qp - m^2)^\alpha} = (-1)^{d/2} i\pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - d/2}},$$

y por tanto

$$\frac{i}{2}\lambda^2 \mu^{2(4-d)} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz [k^2 z(1-z) - m^2]^{d/2-2}.$$

Finalmente, jugando con las potencias de 4π y μ, sabiendo que $\Gamma(2) = 1$, tomando el límite $d \to 4$, $\Gamma(2 - d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + O(\epsilon)$, usando la variable de Maldestan $k^2 = s$ y haciendo el mismo desarrollo en serie para a^ϵ resulta,

$$\frac{i}{2}\lambda^2\mu^{2(2-d/2)}\Gamma(2-d/2)\int_0^1 dz\left[\frac{k^2 z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right]^{d/2-2} =$$
$$=\frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+O(\epsilon)\right)\left[1-\frac{\epsilon}{2}\int_0^1 dz\ln\left(\frac{k^2 z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right] =$$
$$=\frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} - \underbrace{\frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2}[\gamma + F(s,m,\mu)]}_{\text{finito}},$$

donde,

$$F(s,m,\mu) = \int_0^1 dz\ln\left(\frac{sz(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right).$$

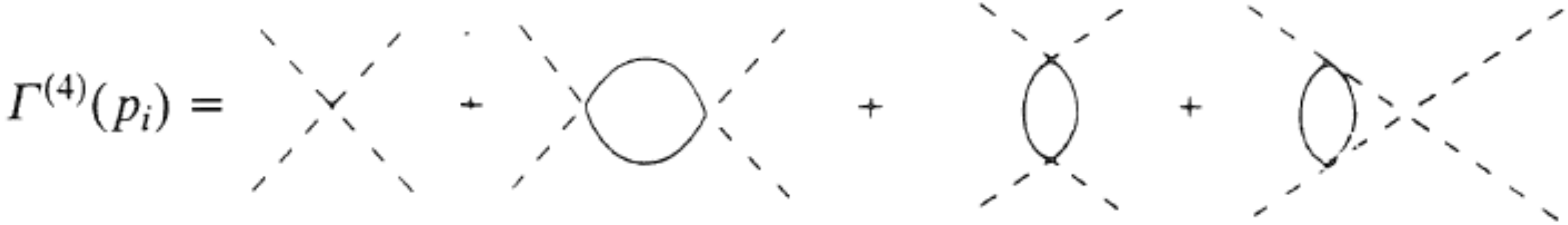
Teniendo en cuenta lo visto la función vértice $\Gamma^{(4)}(p_1, \cdots, p_4)$ se puede expresar como,

$$\Gamma^{(4)}(p_1, \cdots, p_4) = G^{(2)}(p_1)^{-1} \cdots G^{(2)}(p_4)^{-1} G^{(4)}(p_1, \cdots, p_4), \tag{185}$$

donde, como vimos los propagadores inversos amputan las piernas de la función de 4-puntos $G^{(4)}$,

Como la dependencia en los momentos sólo es a través de la función $F(s, m, \mu)$, la correspondiente ecuación se escribe,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_1, \cdots, p_4) &= -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{3i\lambda^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2}[3\gamma + F(s,m,\mu) + F(t,m,\mu) + F(u,m,\mu)] \\ &= -i\lambda\mu^\epsilon\left(1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}\right) + \text{términos finitos}. \end{aligned} \tag{186}$$



De nuevo, para $\epsilon \to 0$ esta expresión tiende a infinito por las mismas razones que para la función de 2-puntos. Si queremos que estas expresiones tengan significado físico deberían ser finitas. Este será el objetivo de la próxima sección, en la que veremos como llevamos a cabo la renormalización.

Cabe resaltar que las correcciones que hemos hecho no son al mismo orden en λ sino al mismo número de L. Esto es así dado que se puede comprobar que expandir en L es equivalente a una expansión en términos de $\hbar$ alrededor de la teoría clásica.

Renormalización.

Una vez aisladas las divergencias, tenemos que absorberlas en la redefinición de parámetros físicos, que serán las magnitudes observables de nuestra teoría. En esto consiste la renormalización. Comprobaremos que para absorber todas las divergencias es necesario redefinir (renormalizar) la masa, la constante de acoplo y el propio campo.

Masa.

Volvemos a escribir el resultado para las función de 2-puntos al que hemos llegado mediante regularización en la sección anterior,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}\right).$$

Para tener resultados físicos medibles necesitamos que esta función sea,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m_1^2,$$

con m_1 una cantidad finita a la que llamaremos *masa física* o masa renormalizada. Esto es así puesto que la definición más fundamental de masa, en este caso, es la dada por la condición de capa de masa, es decir, el polo del propagador, o el cero de la función vértice de dos puntos.

$$m_1^2 = -\Gamma^{(2)}(0).$$

En este sentido,

$$m^2 = m_1^2 + \frac{m^2\lambda}{16\pi^2\epsilon},$$

sustituyendo recursivamente m^2 por esta misma expresión y quedádonos a orden λ,

$$m^2 = m_1^2 + \frac{m_1^2\lambda + \frac{m^2}{16\pi^2\epsilon}\lambda^2}{16\pi^2\epsilon} = m_1^2\left(1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}\right).$$

Llegados a este punto tomamos la *masa desnuda*, el parámetro original que aparece en el Lagrangiano, como un término infinito que *compensa* o *absorbe* la divergencia debida al polo en ϵ. Interpretamos la masa desnuda como la masa que mediríamos de no existir interacción, pero esta no es una situación física aceptable (la medida es en sí una interacción). En este sentido es ilustrativa la imagen de la partícula *vistiéndose* de interacciones.

Constante de Acoplamiento.

De manera similar, reescribimos

$$i\Gamma^{(4)}(k_i) = \lambda\mu^{\epsilon} - \frac{\lambda^2\mu^{\epsilon}}{32\pi^2}\epsilon\left[\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma - F(s,m,\mu) - F(t,m,\mu) - F(u,m,\mu)\right],$$

e igual que antes, teniendo en cuenta que,

$$i\Gamma^{(4)}(k_i = 0) = \lambda_1,$$

definimos,

$$\lambda_1 = \lambda\mu^{\epsilon} - \lambda^2\frac{3\mu^{\epsilon}}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0,m,\mu)\right].$$

Volvemos a sustituir recursivamente λ y nos quedamos a orden g^2,

$$\lambda = \lambda_1\mu^{-\epsilon} + \frac{3\lambda_1^2\mu^{-2\epsilon}}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0,m,\mu)\right].$$

De nuevo consideramos λ_1 como la constante de acoplo física (medible) y λ es considerada como una cantidad infinita sin significado físico. Sería observable si no estuvieran presentes interacciones de orden superior, de nuevo esta no es una situación física razonable y por tanto no hay problema. Al expresar $\Gamma^{(4)}$ en función de λ_1 se cancelan los polos y obtenemos una función vértice de 4-puntos finita.

$$i\Gamma^{(4)}(k_i) = \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2 \mu^{-\epsilon}}{32\pi^2} \left[F(s, m_1, \mu) - F(t, m_1, \mu) - F(u, m_1, \mu) - 3F(0, m_1, \mu) \right].$$

Contratérminos.

Comenzamos entonces identificando el término $\delta\mathcal{L}_1$, que tenemos que añadir en el Lagrangiano para cancelar la divergencia del propagador corregido a 1-loop que afecta a la masa. Dado que la cantidad renormalizada es el término que acompaña a ϕ^2 en el Lagrangiano tiene sentido que añadamos un término ϕ^2. El coeficiente de este contratérmino será simplemente la corrección a la masa, es decir, la autoenergía Σ a 1- loop , δm,

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\frac{\delta m^2}{2}\phi^2 = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2\epsilon}\phi^2.$$

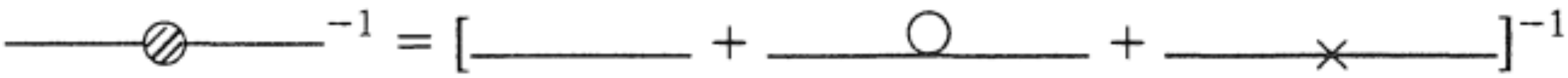
Tratar este término como una interacción da lugar a una regla de Feynman adicional,

 $= -i\delta m^2.$

Por tanto el propagador completo invertido, es decir, la función vértice de 2-puntos será,

$$\Gamma^{(2)}(p) = i\left(\frac{p^2 - m^2}{i} - \cancel{\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2}}\frac{1}{\epsilon} + \cancel{\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2}}\frac{1}{\epsilon}\right) = p^2 - m^2,$$

Ahora, al contrario que en la
sección anterior, la cantidad que consideramos finita es m, la masa física (medible) de la partícula.



Inverso del propagador completo a primer orden en λ (1-vértice),

.

Hacemos un desarrollo similar para identificar el contratérmino que ahora cancelará la divergencia proveniente de la corrección a 1- loop y a orden λ^2 de la función vértice de 4-puntos $\Gamma^{(4)}$, que afecta a la constante de acoplo. En este caso tendremos que añadir un término ϕ^4 cuyo coeficiente nos lo da precisamente la corrección a la constante de acoplo,

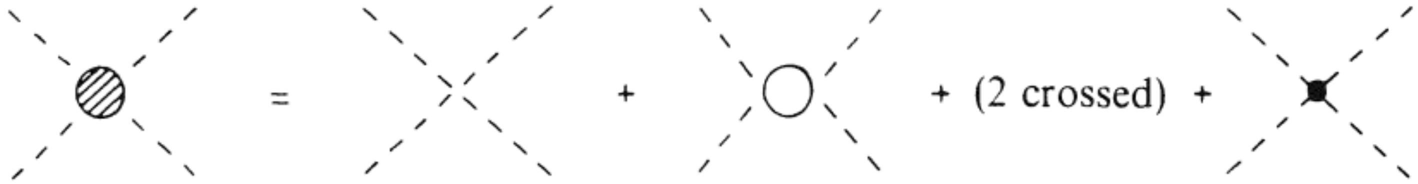
$$\delta\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4!}\frac{3\lambda^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon}\phi^4 = -B\frac{\lambda\mu^\epsilon}{4!}\phi^4.$$

De la misma forma que en el caso de la masa, este término proporciona una regla de Feynman adicional,

$$= -i\frac{3\lambda^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} = -iB\lambda\mu^\epsilon,$$

y por tanto $\Gamma^{(4)}$ será finita,

$$\Gamma^{(4)} =$$

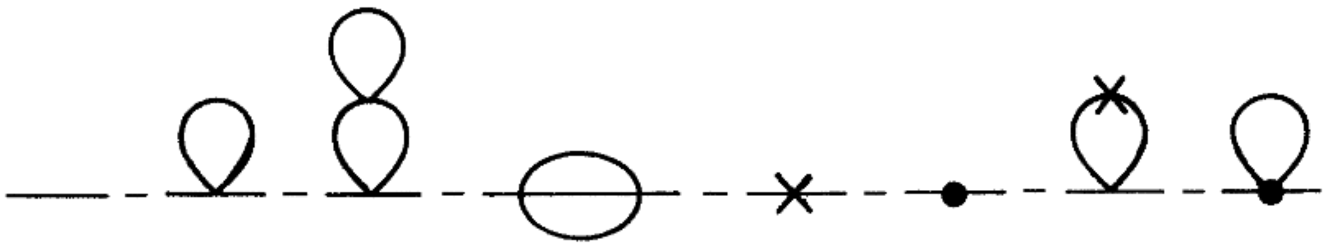


$$= -i\lambda\mu^\epsilon.$$

De nuevo los términos finitos son obviados o incluidos en λ.

Como curiosidad en la que no profundizaremos mostramos el propagador corregido a dos loops (salvo signos),

$$\Gamma^{(2)}_{2-loop} =$$



Sumando todos estos términos, obtenemos el Lagrangiano de contratérminos $\mathcal{L}_{CT}$, que añadiremos al Lagrangiano original,

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{A}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\delta m^2}{2}\phi^2 - \frac{B\lambda\mu^\epsilon}{4!}\phi^4.$$

El lagrangiano total, $\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT}$, llamado *Lagrangiano desnudo* (en inglés, *bare Lagrangian*), resulta,

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2}\phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4,$$

donde hemos definido las cantidades:

$$Z_m^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{m^2(1+A)} \quad \rightarrow \quad m_B = Z_m m,$$
$$Z_\lambda = \frac{1+B}{(1+A)^2} \quad \rightarrow \quad \lambda_B = \mu^\epsilon Z_\lambda \lambda,$$
$$Z_\phi = 1 + A \quad \rightarrow \quad \phi_B = \sqrt{Z_\phi}\phi.$$