

7.2.2 QED

(7.14) de la clase 27 indica que,

$$D = 4L - 2I_\gamma - I_f = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_f \quad (7.21)$$

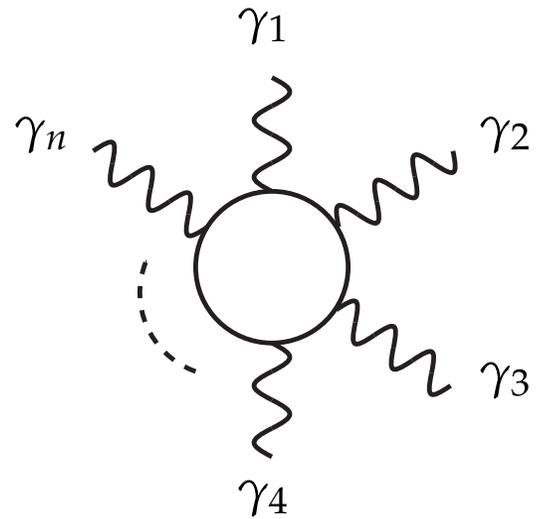
donde hemos usado las relaciones

$$L = I - V + 1 = I_\gamma + I_f - V + 1, \quad V = E_\gamma + 2I_\gamma, \quad 2V = E_f + 2I_f. \quad (7.22)$$

Vemos pues que en QED los diagramas con divergencias primitivas son potencialmente aquellos para los que $D \geq 0$, es decir

$$E_\gamma + \frac{3}{2}E_f \leq 4. \quad (7.23)$$

Antes de discutir todas las posibilidades conviene demostrar el *Teorema de Furry* que establece que funciones de Green sin líneas externas fermiónicas ($E_f = 0$) y con un número impar de líneas externas fotónicas ($E_\gamma = \text{impar}$) son cero a todo orden en teoría de perturbaciones debido a la *conservación de la conjugación de carga* de la QED:



$$= 0, \quad n \text{ impar} \quad (7.24)$$

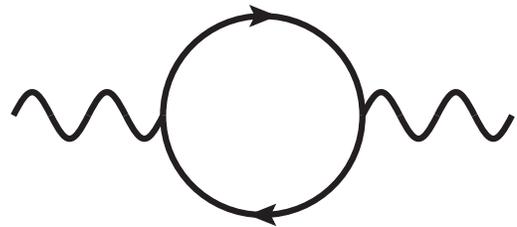
$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | (CA_{\mu_1}(x_1)C) \cdots (CA_{\mu_n}(x_n)C) C e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} C | 0 \rangle \\
 &= (-1)^n \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{QED}}} | 0 \rangle, \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado $C^2 = 1$, $C | 0 \rangle = | 0 \rangle$, $CA_{\mu}C = -A_{\mu}$ y $C\mathcal{H}_{\text{QED}}C = \mathcal{H}_{\text{QED}}$. Para n impar estas funciones de Green coinciden con su opuesta y por tanto deben anularse.

Una vez descartadas estas funciones de Green, clasifiquemos el resto que cumplen (7.23), es decir $D = 4 - E_{\gamma} - \frac{3}{2}E_f \geq 0$:

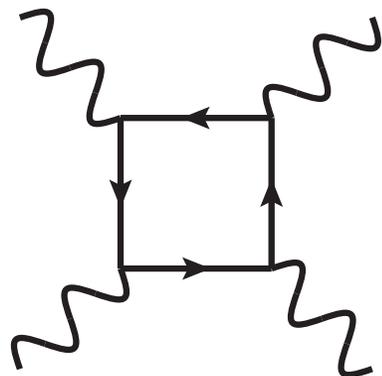
■ $E_f = 0$

- $E_\gamma = 0$: *Energía del vacío*. Cuárticamente divergente pero irrelevante para procesos de scattering.
- $E_\gamma = 2$: *Autoenergía del fotón*. A priori cuadráticamente divergente, aunque la simetría gauge hace que la divergencia sea en realidad logarítmica.



A Feynman diagram representing the self-energy of a photon. It consists of a central circle with two arrows indicating a clockwise loop. Two wavy lines, representing photons, enter from the left and exit to the right, connected to the circle. To the right of the diagram are three dots and the label (7.26).

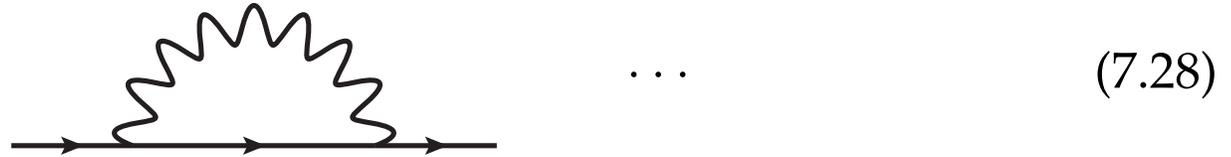
- $E_\gamma = 4$: *Light by light scattering*. A priori logarítmicamente divergente aunque de nuevo la simetría gauge la protege haciéndola finita.



A Feynman diagram representing light-by-light scattering. It features a central square loop with four arrows indicating a clockwise path. Four wavy lines, representing photons, enter from the left and exit to the right, connected to the four vertices of the square. To the right of the diagram are three dots and the label (7.27).

- $E_f = 2$

- $E_\gamma = 0$: *Autoenergía del fermión*. A priori linealmente divergente, aunque en este caso la simetría quiral reduce la divergencia a logarítmica.



- $E_\gamma = 1$: *Corrección al vértice*. Divergencia logarítmica.



Las divergencias primitivas en QED son por tanto la autoenergía del fotón, la autoenergía del fermión y la corrección al vértice. Sus contribuciones a un *loop* se muestran en (7.26), (7.28) y (7.29), respectivamente.

7.3 Regularización dimensional

Hemos anunciado previamente que en teoría cuántica de campos se pueden hacer predicciones precisas y sin ambigüedades a pesar de la aparición de infinitos en los cálculos a uno o más *loops*. El procedimiento, denominado *renormalización*, consiste en absorber los infinitos en un número finito de medidas experimentales de manera que todos los demás observables serán finitos. Pero antes tenemos que regularizar los infinitos para poder manipularlos. En la sección anterior usamos un regulador muy sencillo, un *cut-off* en el momento del *loop*, pero este regulador no resulta óptimo. La razón es que viola explícitamente algunas de las simetrías de la teoría que son importantes a la hora de implementar el proceso de renormalización.

El método que emplearemos se conoce como *regularización dimensional* y consiste en asumir que en lugar de 4 dimensiones espacio-temporales trabajamos en $d \equiv 4 - \epsilon$.^c Eligiendo el valor de ϵ adecuado cualquier diagrama se puede hacer finito. Al final del cálculo, y después del proceso de renormalización, tomaremos el límite $\epsilon \rightarrow 0$ para eliminar el regulador.

Veamos cómo calcular la autoenergía del electrón. Ya sabemos que el propagador fermiónico en el espacio de momentos es la transformada de Fourier de la función de dos puntos,

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = \int d^4x \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | 0 \rangle e^{ipx} \quad (7.30)$$

que podemos resolver perturbativamente en términos de funciones de dos puntos 1PI, como hicimos para campos escalares

$$\begin{aligned} \text{---} \circlearrowleft \text{---} &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} [-i\Sigma(\not{p})] \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \left[1 + \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} + \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0}} = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})} \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde los diagramas 1PI amputados son

$$\text{---} \circlearrowleft \text{1PI} \text{---} = -i\Sigma(\not{p}) \tag{7.32}$$

y

$$\text{---} = \tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} \quad (\text{propagador libre}). \tag{7.33}$$

^c No confundir este ϵ con el $\epsilon \rightarrow 0^+$ de la prescripción de Feynman para los propagadores, que en adelante se sobreentiende y no escribiremos.

Veamos que, como ocurre con la autoenergía $M^2(p)$ del campo escalar, la *autonería del electrón* $\Sigma(\not{p})$ contribuye a la masa física (m) y a la renormalización de la función de onda del electrón (Z_ψ):

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (7.34)$$

y por tanto, cerca de $\not{p} = m$,

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) = \not{p} - m_0 - \Sigma(m) - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} (\not{p} - m) = (\not{p} - m) \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right). \quad (7.35)$$

Así que

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \text{---} \circ \text{---} \longrightarrow \end{array} = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - m} + \text{regular cerca de } \not{p} = m \quad (7.36)$$

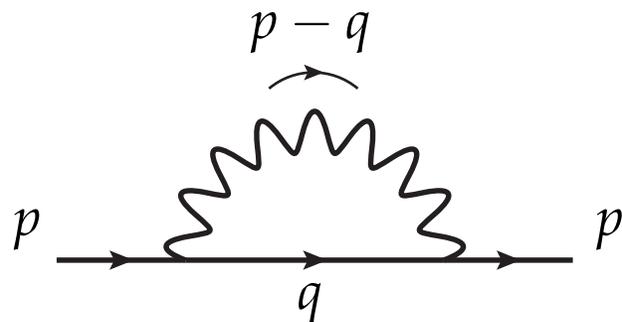
de donde

$$m = m_0 + \Sigma(m), \quad Z_\psi = \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right)^{-1}. \quad (7.37)$$

Para hallar $\Sigma(p)$ se procede orden a orden en TP:

(7.38)

Vamos a calcularla ahora a 1 *loop* para ilustrar el método de regularización dimensional:



$$-i\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie)\gamma^\mu \frac{i(\not{q} + m_0)}{q^2 - m_0^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p-q)^2} (-ie)\gamma^\nu .$$

(7.39)

Como hemos dicho esta integral es divergente y para regularizarla la hallaremos en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones:

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (\not{q} + m_0) \gamma_\mu}{(q^2 - m_0^2)(p - q)^2}, \quad (7.40)$$

donde hemos introducido un parámetro μ con dimensiones de masa, para que Σ mantenga las dimensiones correctas independientemente del valor de d . Este parámetro no es físico, lo hemos introducido por consistencia en el proceso de regularización y no afectará a ningún observable físico, aunque puede aparecer en cálculos intermedios de magnitudes no observables.

A continuación describiremos, usando este ejemplo como ilustración, algunas de las técnicas estándar en cálculos a un *loop*.

1. En primer lugar necesitamos extender las reglas de la *Diracología* a d dimensiones. Para ello hay que notar que los índices espacio-temporales recorren las d dimensiones mientras que las matrices de Dirac siguen siendo matrices 4×4 (espacio espinorial). Se cumplen por tanto las siguientes relaciones:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = d, \quad (7.41)$$

que conducen a las identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \mathbf{1}_{4 \times 4} = (4 - \epsilon) \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (7.42)$$

$$\gamma^\mu \not{d} \gamma_\mu = -\not{d} \gamma^\mu \gamma_\mu + 2\not{d} = -(d - 2)\not{d} = -(2 - \epsilon)\not{d}. \quad (7.43)$$

2. Otra técnica consiste en la introducción de *parámetros de Feynman*, que nos permiten agrupar el producto de propagadores en una expresión que manipularemos después de forma sencilla. La forma general para n propagadores se basa en la siguiente igualdad (fácilmente demostrable):

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (7.44)$$

En nuestro cálculo hay dos factores en el denominador (dos propagadores),

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA_1 + (1-x)A_2]^2} \quad (7.45)$$

que podemos identificar como $A_2 = q^2 - m_0^2$ y $A_1 = (p - q)^2$, así que

$$\frac{1}{(q^2 - m_0^2)(p - q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + x(p^2 - 2pq) - (1-x)m_0^2]^2}. \quad (7.46)$$

3. Lo interesante de esta parametrización es que ahora podemos hacer un cambio de variable para *completar un cuadrado perfecto* en el denominador, *desplazando el momento de integración*. En nuestro caso, si introducimos un nuevo momento

$$\ell \equiv q - xp \tag{7.47}$$

en (7.40), usamos las identidades (7.42) y (7.43), e introducimos el parámetro de Feynman de (7.46) tenemos

$$-i\Sigma^{(1)} = -e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{-(2-\epsilon)(\ell + xp) + (4-\epsilon)m_0}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \tag{7.48}$$

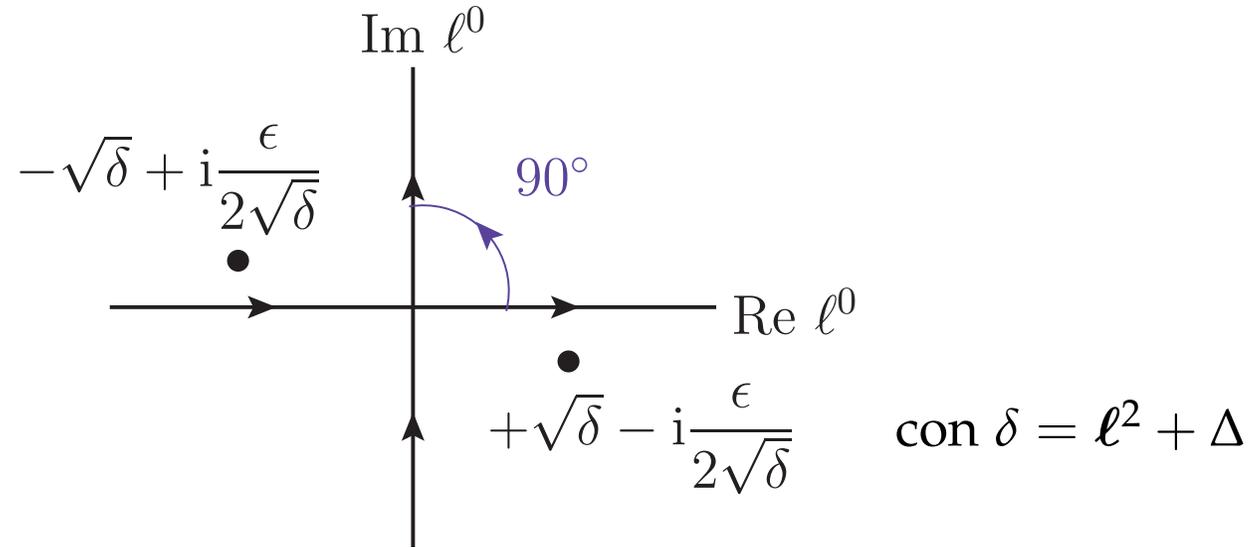
donde

$$\Delta \equiv -x(1-x)p^2 + (1-x)m_0^2. \tag{7.49}$$

Una cuestión muy importante es que el cambio de variable realizado no es más que una traslación, que no introduce ningún factor jacobiano. Sin embargo, sólo tenemos garantizado que la integral no cambia bajo esa traslación de la variable de integración si la integral es finita, lo cual se cumple gracias a que la hemos regularizado antes de hacer estas manipulaciones.

4. Para integrar (7.48) realizamos lo que se conoce como *rotación de Wick*, que consiste en hacer un nuevo cambio de variable:

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \ell = \ell_E \quad \Rightarrow \quad \ell^2 = (\ell^0)^2 - \ell^2 = -(\ell_E^0)^2 - \ell_E^2 = -\ell_E^2. \quad (7.50)$$



(Δ es una función de x definida positiva en la región de momentos de interés, como pronto veremos.)

El subíndice E nos recuerda que con la rotación de Wick pasamos del espacio de Minkowski al espacio Euclídeo, en el que el módulo al cuadrado de un cuadrivector es la suma de los cuadrados de todas sus componentes, sin signo relativo entre la componente temporal y las espaciales.

De nuevo es necesario hacer un comentario importante. El cambio de variable que genera la rotación de Wick puede resultar extraño a primera vista, pues define momentos complejos. Sin embargo lo único que estamos haciendo es girar el contorno de integración originalmente sobre el eje ℓ^0 real, rotándolo 90° en el sentido opuesto a las agujas del reloj. El teorema de Cauchy garantiza que la integral no varía pues en este giro los contornos no cruzan ninguno de los polos definidos por la prescripción $i\epsilon$ de Feynman.

5. Ahora que la integral se calcula en el espacio Euclídeo podemos descomponerla en una parte radial y otra angular en d dimensiones. Supongamos que el exponente del denominador es n en lugar de 2, para resolver un caso más general. Entonces

$$\int d^d \ell_E \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \int d\Omega_d \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (7.51)$$

donde $d\Omega_d$ es el elemento de ángulo sólido en d dimensiones. En efecto:

a) A partir de la integral de una gaussiana:

$$\begin{aligned}(\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp \left\{ - \sum_i^d x_i^2 \right\} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \int d\Omega_d \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t} = \int d\Omega_d \frac{1}{2} \Gamma(d/2)\end{aligned}\tag{7.52}$$

donde hemos introducido la función *Gamma de Euler*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t} .\tag{7.53}$$

Por tanto,

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)} .\tag{7.54}$$

b) En cuanto a la parte radial:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(t + \Delta)^n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \int_0^1 dz z^{n-\frac{d}{2}-1} (1-z)^{\frac{d}{2}-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(n)} \tag{7.55}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio $z = \Delta/(t + \Delta)$ y hemos introducido la función *Beta de Euler*:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dz z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \tag{7.56}$$

6. Conviene conocer algunas *propiedades de la Gamma de Euler*:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{si } n \in \mathbb{N} . \quad (7.57)$$

$\Gamma(x)$ tiene polos simples en $x = 0, -1, -2, \dots$. Desarrollando en serie en torno a los polos,

$$x = 0 ; \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) , \quad (7.58)$$

$$x = -1 ; \quad \Gamma(x) = -\frac{1}{(x + 1)} + \gamma - 1 + \dots + \mathcal{O}(x + 1) , \quad (7.59)$$

donde $\gamma = 0.5772\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni. En particular, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ ($d \rightarrow 4$) tenemos

$$\Gamma(2 - d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (7.60)$$

$$\Gamma(d/2) = \Gamma(2) = 1 . \quad (7.61)$$

Ya podemos calcular la integral (7.48), haciendo la rotación de Wick (7.50) y usando el resultado (7.51) para $n = 2$:

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\epsilon/2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon/2) [-(2-\epsilon)x\not{p} + (4-\epsilon)m_0] \Delta^{-\epsilon/2}, \quad (7.62)$$

donde hemos utilizado que la integral sobre $\not{\ell}$ es cero por ser el integrando impar y el dominio de integración simétrico. Ahora, además de desarrollar en serie la función Gamma, debemos también desarrollar las potencias cuyo exponente es proporcional a ϵ

$$(4\pi)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (7.63)$$

$$\left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) . \quad (7.64)$$

Poniéndolo todo junto obtenemos finalmente

$$-i\Sigma^{(1)} = \frac{-ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ x\not{p} \left[-2 \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) + 2 \right] + m_0 \left[4 \left(\Delta_\epsilon - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right) - 2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (7.65)$$

donde hemos definido

$$\Delta_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi . \quad (7.66)$$

Este resultado presenta varias propiedades interesantes. En primer lugar, hemos parametrizado las divergencias ultravioletas en forma de polos en ϵ . En segundo lugar, $\Sigma(p)$ depende a un *loop* explícitamente del parámetro μ . Esto es debido a que Σ no es un observable. Centrando nuestra atención en la parte divergente podemos hacer fácilmente la integral sobre el parámetro de Feynman obteniendo

$$\Sigma^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (-\not{p} + 4m_0) + \text{finito} . \quad (7.67)$$