

Cuantización del campo EM

- Energía de punto cero

Con el objetivo de introducir el problema de la energía del estado fundamental o de vacío de la teoría cuántica de campos, vamos a resumir primero los conceptos y resultados más importantes del método de cuantización canónico aplicado al campo EM. Para ello vamos a trabajar en el interior de una cavidad tridimensional de paredes perfectamente conductoras, dado que esta configuración será de gran importancia en capítulos posteriores. En todo el trabajo utilizaremos un sistema de unidades en el cual $\hbar = c = k_B = 1$.

Para llevar a cabo la cuantización del campo EM buscamos primero la solución clásica del problema. La dinámica del campo dentro de la cavidad esta descripta por la ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\begin{aligned}
 (a) \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (b) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
 (c) \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & (d) \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0,
 \end{aligned}$$

que pueden ser formuladas en términos de un cuadvivector potencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, con

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (2.1)$$

Debido a la libertad de gauge de la teoría vamos a elegir el gauge de Coulomb o transversal, en el cual los potenciales satisfacen

$$\phi = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.2)$$

dado que no hay fuentes. De esta forma las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\square \mathbf{A} = 0. \quad (2.3)$$

Tomemos como cavidad un volumen rectangular de dimensiones L_x , L_y y L_z ; con el origen de coordenadas en uno de sus vértices. Supongamos las paredes de la cavidad de material perfectamente conductor, con lo cual las condiciones de contorno sobre cada una de ellas son

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{\parallel}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad \mathbf{B}_{\perp} = (\nabla \times \mathbf{A})_{\perp} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

donde $\parallel$ y $\perp$ indican las componentes de los campos paralela y perpendicular a la pared respectivamente.

Un conjunto ortonormal y completo de soluciones a la condición de gauge (2.2), la ecuación de campo (2.3), y las condiciones de contorno (2.4) esta dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} & \sqrt{\frac{8}{L_x L_y L_z}} \left(\epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(x)} \cos\left(\frac{\pi k_x}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi k_y}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{\pi k_z}{L_z} z\right), \right. \\ & \epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(y)} \sin\left(\frac{\pi k_x}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{\pi k_y}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{\pi k_z}{L_z} z\right), \\ & \left. \epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(z)} \sin\left(\frac{\pi k_x}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi k_y}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{\pi k_z}{L_z} z\right) \right) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

donde el vector de onda, $\mathbf{k}$, está determinado por

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi k_x}{L_x}, \frac{\pi k_y}{L_y}, \frac{\pi k_z}{L_z} \right) \quad k_i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2.6)$$

y la frecuencia esta dada por $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$. También notamos que hemos introducido, para cada valor posible de $\mathbf{k}$, una base ortonormal de vectores polarización $\epsilon_{\mathbf{k},\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), que satisfacen

$$\epsilon_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \epsilon_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \epsilon_{\mathbf{k},\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (2.7)$$

con lo cual $\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}$ cumple la condición de divergencia nula.

A menos que se indique lo contrario, el producto interno que vamos a considerar en todo el trabajo es el de Klein-Gordon, definido por

$$(\psi, \xi) = -i \int_{\text{cavidad}} d^3x [\psi \dot{\xi}^* - \dot{\psi} \xi^*]. \quad (2.8)$$

El mismo es utilizado usualmente en teoría cuántica de campos, y tiene como propiedad ser independiente del tiempo.

Para poder llevar a cabo la cuantización canónica de una teoría, debe ser posible expresar la misma mediante un principio variacional En el caso del electromagnetismo esto se logra a partir del Lagrangeano de campo libre

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético definido por

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.10)$$

Las variables dinámicas de la teoría cuantizada van a ser los campos A_μ y sus campos conjugados Π^μ , definidos por

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (2.11)$$

$$\Pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = \mathbf{E}^j \quad (2.12)$$

En principio, la ecuación (2.11) representa un inconveniente dentro del esquema de cuantización. Sin embargo, habiendo escogido el gauge de Coulomb (2.2), obtenemos que tanto el campo A_0 (i.e. ϕ) como su campo conjugado Π^0 son nulos, y por lo tanto, no son ya variables dinámicas.

La cuantización del campo electromagnético se obtiene al reemplazar los campos clásicos A_j y sus conjugados Π^j por operadores en un espacio de Hilbert, que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$[\hat{A}^i(\mathbf{x}, t), \hat{A}^j(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\Pi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^j(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.13)$$

$$[\hat{A}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^j(\mathbf{x}', t)] = i \left(\delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.14)$$

Notamos aquí que al cuantizar una teoría sin vínculos, es decir, una teoría donde las variables dinámicas son independientes, el conmutador dado en la ec.(2.14) debe imponerse igual a $i\delta^{ij}$. Sin embargo, el campo electromagnético es una teoría con vínculos, ya que se deben satisfacerse la condición de gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, y la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Por lo tanto, para que el conmutador (2.14) sea consistente con estas condiciones, se reemplaza la δ^{ij} usual por una $\Delta^{ij} = \delta^{ij} - \partial^i \partial^j / \nabla^2$, de ‘divergencia nula’. Estos vínculos disminuyen los grados de libertad de la teoría, y consecuentemente la relación (2.14) es la responsable de que los fotones no tengan polarización longitudinal.

El próximo paso es desarrollar el operador $\hat{\mathbf{A}}$ en la base completa de soluciones (2.5),

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}(\mathbf{x}, t) + \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger} \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\star}(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

Las relaciones de conmutación (2.13) y (2.14) para los campos se traducen en las siguientes para los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger}$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}, \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^{\dagger}] = \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}, \quad (2.16)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}, \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^{\dagger}] = 0. \quad (2.17)$$

El estado fundamental o estado de vacío se define mediante la relación

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha} |0\rangle = 0. \quad (2.18)$$

La acción de $\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$ sobre los elementos del espacio esta dada por

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha} |\dots n_{\mathbf{k},\alpha} \dots\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\alpha}} |\dots (n_{\mathbf{k},\alpha} - 1) \dots\rangle, \quad (2.19)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger |\dots n_{\mathbf{k},\alpha} \dots\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\alpha} + 1} |\dots (n_{\mathbf{k},\alpha} + 1) \dots\rangle, \quad (2.20)$$

con lo cual podemos obtener los estados excitados como

$$|n_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}, n_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i,\alpha_i} \frac{(a_{\mathbf{k}_i,\alpha_i}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_i,\alpha_i}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_i,\alpha_i}!}} |0\rangle. \quad (2.21)$$

El estado definido anteriormente corresponde a un estado físico con $n_{\mathbf{k}_1, \alpha_1}$ fotones de energía $\omega_{\mathbf{k}_1}$ y momento $\mathbf{k}_1$; $n_{\mathbf{k}_2, \alpha_2}$ fotones de energía $\omega_{\mathbf{k}_2}$ y momento $\mathbf{k}_2$;... . Una combinación lineal de los elementos con distinto valor de α_i nos permite obtener estados de helicidad definida. Es decir, una transformación lineal de la base dada por (2.21) nos permite obtener otra base, denominada representación circular, cuyos elementos son autoestados del operador helicidad (además del operador energía e impulso). En cada estado de esta nueva base, los fotones con momento $\mathbf{k}_i$ tendrán helicidad positiva (+1) o negativa (−1) según su impulso angular total tenga una componente paralela o antiparalela al sentido de propagación ($\mathbf{k}_i$).

Debido a la acción de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger$ sobre el espacio, dada por las ecs.(2.19) y (2.20), se los denomina operadores de destrucción y creación de partículas respectivamente.

Consideremos ahora la cuantización del Hamiltoniano del sistema, el cual esta definido a partir del Lagrangeano (2.9) de la siguiente forma

$$H = \frac{1}{2} \int_{cavidad} d^3x \left(\Pi^j \dot{A}_j - \mathcal{L} \right) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{cavidad} d^3x \left(|\mathbf{A}|^2 + |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right). \quad (2.23)$$

Reemplazando en H el campo $\mathbf{A}$ por su correspondiente operador cuántico (2.15), llegamos a

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \right). \quad (2.24)$$

Hasta aquí sólo hemos usado los dos postulados fundamentales del método de cuantización canónico, el reemplazo de los campos clásicos por operadores cuánticos y la imposición de reglas de conmutación determinadas. Sin embargo esto no es suficiente para definir el Hamiltoniano (2.24) en forma satisfactoria, debido al orden en que aparecen los operadores no conmutativos $\hat{a}$ y $\hat{a}^{\dagger}$. Este hecho tiene una importancia fundamental dado que, usando la relación (2.16), podemos escribir H como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.25)$$

consecuentemente su valor de expectación en vacío (energía de punto cero) es divergente

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (2.26)$$

Hace falta, por lo tanto, un tercer requisito. Para que la teoría cuántica este bien definida, deben existir métodos capaces de eliminar los valores medios divergentes.

El orden normal de Wick es una prescripción tendiente a eliminar las magnitudes divergentes de la teoría. Consiste en reemplazar los operadores de la misma ($\hat{\mathbf{A}}$) por sus correspondientes ordenados normalmente ($: \hat{\mathbf{A}} :$) en los cuales el orden de los operadores no conmutativos esta determinado, ubicándose los de destrucción a la derecha de los de creación. Esto es

$$: \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} := \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (2.27)$$

$$: \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} := \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}. \quad (2.28)$$

En particular el Hamiltoniano ordenado normalmente queda

$$: \hat{H} := \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^{\dagger} \right) = \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle. \quad (2.29)$$

Por lo tanto reemplazar el Hamiltoniano original $\hat{H}$ por su ordenado normalmente : $\hat{H}$: es equivalente a una sustracción formal de la energía de punto cero. Recordamos que el orden normal de Wick no se desprende del esquema de cuantización canónica, sino que es un postulado adicional necesario para hacer finita la energía del estado de vacío. Es aceptable debido a la noción de que el estado fundamental de un sistema no interactuante debe tener energía nula. El argumento general de que esta sustracción puede hacerse arbitrariamente es que la misma equivale a una redefinición de la escala de energía, y esto es puede hacerse ya que en la práctica sólo es posible medir diferencias de energía ¹. Sin embargo este argumento debe ser tomado con precaución. En el próximo capítulo analizaremos un método de renormalización distinto, que no siempre asigna un valor nulo de energía al estado de vacío y que puede ser verificado experimentalmente.

¹Al menos cuando no se consideran efectos de Relatividad General.

Efecto Casimir

3.1 Energía de Casimir

Con respecto al problema de encontrar conceptos generales que nos permitan definir las propiedades del estado de vacío de la teoría de campos, debemos observar que los campos cuánticos libres son construcciones matemáticas abstractas. En la realidad, estos campos existen y pueden ser medidos sólo en presencia de fuentes o mediante interacciones con otros campos. Un caso especial de particular interés es un campo confinado a una región finita del espacio.

En general, un campo físico puede ser forzado a satisfacer ciertas condiciones de contorno. Un hecho importante que debe ser considerado es que la presencia de estos contornos induce un cambio en el espectro de energía del campo, con lo cual se modifica su energía de punto cero.

Consecuentemente es razonable definir la energía del estado de vacío ‘físico’ como una diferencia entre energías de punto cero. Llamemos $\partial\Gamma$ al contorno arbitrario requerido para el campo. Si $E_0[\partial\Gamma]$ es la energía de punto cero del campo en presencia de contornos, y $E_0[0]$ la correspondiente al campo libre; se define formalmente la energía del estado de vacío (energía de Casimir) como

$$E_C[\partial\Gamma] = E_0[\partial\Gamma] - E_0[0]. \quad (3.1)$$

En general esta definición debe ir acompañada de un método de regularización que permita definir correctamente las magnitudes, en principio divergentes, que están siendo

restadas.

La existencia de contornos puede considerarse como una idealización de condiciones reales donde existen configuraciones de materia o fuerzas externas actuando sobre el campo. La definición (3.1) puede generalizarse a estos casos llevando a diferentes versiones del efecto Casimir.

En nuestro caso, vamos a usar (3.1) para calcular la fuerza entre dos placas conductoras situadas en vacío.

Resumiendo:

-) La ambigüedad de una energía de punto cero divergente puede ser eliminada reteniéndolo el Hamiltoniano original del campo, e introduciendo la definición (3.1) para la energía del estado de vacío físico.

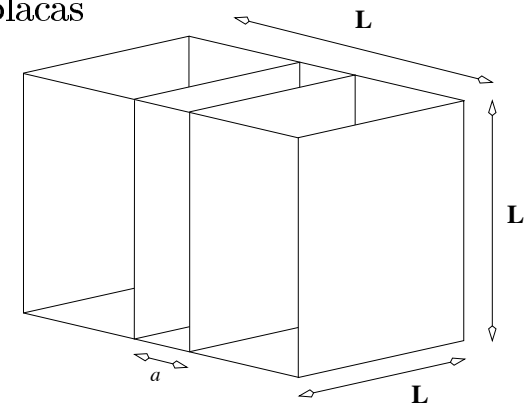
-) La noción respecto del vacío no interactuante no es afectada, porque según (3.1) es $E_C(0) = 0$.

-) Las variaciones de la energía de punto cero son, en principio, medibles.

3.2 Fuerza entre placas conductoras en vacío

En 1948 Casimir predijo la existencia de una fuerza atractiva entre dos placas planas, conductoras y descargadas, enfrentadas y situadas en vacío . De acuerdo a la definición (3.1) esta fuerza es consecuencia de que la energía del estado de vacío del campo entre las placas depende de la separación entre las mismas.

Para calcularla vamos a considerar una cavidad cúbica de volumen L^3 y paredes perfectamente conductoras. Dentro de ella se disponen dos placas, también conductoras, separadas una distancia a en la dirección 'z' ($L \gg a$). Esta configuración se ilustra en la fig.3.1. Para obtener la energía de Casimir debemos hacer la diferencia entre las energías de punto cero de la configuración anterior, y la configuración de campo libre, en la cual las dos placas están separadas por una distancia L (que es equivalente a haberlas quitado).



Formalmente se define la energía de Casimir como

$$E_C(a) = \lim_{L \rightarrow \infty} \{E_I(a) + 2E_{II}(\frac{L-a}{2}) - E_{III}(L)\}. \quad (3.2)$$

En el capítulo 2 obtuvimos la cuantización del campo EM dentro de una cavidad rectangular como las que vamos a utilizar ahora. Allí habíamos encontrado que la energía de punto cero estaba dada por (2.26)

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}, \quad (3.3)$$

y el espectro era discreto,

$$\omega_{\mathbf{k}} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{k_z}{L_z}\right)^2} \quad \text{con } k_i = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.4)$$

Calculemos primero la energía de punto cero cuando las placas estan separadas una distancia a en dirección z , con lo cual en la relación (3.4) debemos reemplazar $L_x = L_y = L$ y $L_z = a$,

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad k_x = \left(\frac{k_x \pi}{L}\right), \quad k_y = \left(\frac{k_y \pi}{L}\right), \quad k_z = \left(\frac{k_z \pi}{a}\right). \quad (3.5)$$

Como se cumple la condición $L \gg a$, las componentes del vector de onda k_x, k_y pueden ser tratadas como variables continuas, mientras que k_z sigue tomando valores discretos. Por lo tanto, las sumas sobre las componente del vector de onda paralelas a la placa se convierten en integrales, según la prescripción

$$\sum_{k_x \geq 0} \sum_{k_y \geq 0} \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \quad (3.6)$$

La condición (2.2), $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, se traduce a cada uno de los modos del campo, dados por la ec.(2.5), como $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} = 0$; y a su vez esto equivale a $\epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(x)} k_x + \epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(y)} k_y + \epsilon_{\mathbf{k},\alpha}^{(z)} k_z = 0$. Por lo tanto, a cada vector de onda le corresponden dos polarizaciones si sus componentes son todas distintas de cero, y una si alguna de ellas es nula. En nuestro caso esto debe ser considerado sólo con respecto a la componente k_z , ya que k_x y k_y son continuas. Con esto en mente reescribimos las expresiones (3.3) y (3.4) de la forma

$$E_I(a) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + 2 \sum_{n \geq 1} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \right\}, \quad (3.7)$$

donde llamamos $k_z = n$. Cambiando de variables a coordenadas polares, e integrando la parte angular llegamos a

$$E_I(a) = \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty k_{\parallel} dk_{\parallel} \left\{ \frac{k_{\parallel}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} \right\}, \quad (3.8)$$

donde definimos $k_{\parallel} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Para las restantes energías de punto cero a calcular, todas las componentes del vector de onda pueden considerarse variables continuas. El resultado es

$$E_{II}\left(\frac{L-a}{2}\right) = \frac{L^2}{2\pi} \frac{L-a}{2a} \int_0^\infty k_{\parallel} dk_{\parallel} \int_0^\infty dn \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}, \quad (3.9)$$

$$E_{III}(L) = \frac{L^2}{2\pi} \frac{L}{a} \int_0^\infty k_{\parallel} dk_{\parallel} \int_0^\infty dn \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}, \quad (3.10)$$

donde llamamos $k_z = \frac{n\pi}{a}$.

Antes de calcular la energía de Casimir (3.2) con las expresiones (3.8), (3.9) y (3.10), debemos regularizarlas debido a que divergen para valores grandes de $|\mathbf{k}|$ (divergencia ultravioleta). Hay varios métodos para lograr esto, más aún, en el caso del campo EM en presencia de conductores existen fundamentos físicos en los cuales basarse. Un material conductor real se vuelve transparente a las ondas electromagnéticas de frecuencia suficientemente alta, por ejemplo, tales que la longitud de onda sea menor que el tamaño atómico

Por lo tanto los modos de alta frecuencia no son afectados por la presencia de las placas. Esto quiere decir que los modos con frecuencias mayores que una dada frecuencia de corte, ω_c , se cancelan en la expresión (3.2). Para la regularización de las expresiones (3.8) (3.9) y (3.10), esto implica la introducción de una función de corte $f(k/k_c)$, continua e infinitamente derivable, que satisfaga

$$f(k/k_c) = \begin{cases} 1 & k \leq k_c \\ 0 & k \gg k_c \end{cases} \quad (3.11)$$

donde k_c indica el número de onda de corte, que depende del material en cuestión pero es del orden de la inversa del radio atómico. Esta función de corte es eliminada al final del cálculo tomando el límite $k_c \rightarrow \infty$.

Una vez hecha la regularización, reemplazamos (3.8) (3.9) y (3.10) en (3.2) y obtenemos la siguiente expresión para la energía de vacío entre las placas

$$E_C(a) = \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty k_{\parallel} dk_{\parallel} \left\{ \frac{k_{\parallel}}{2} f(k_{\parallel}/k_c) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} f\left(\sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}/k_c\right) - \int_0^\infty dn \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} f\left(\sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}/k_c\right) \right\}. \quad (3.12)$$

Haciendo el cambio de variables $y = k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, y definiendo la función

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{y} f\left(\frac{\pi}{ak_c} \sqrt{y}\right) dy \quad (3.13)$$

podemos expresar la ecuación (3.12) de la siguiente forma

$$E_C(a) = \frac{L^2 \pi^2}{4a^3} \left\{ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(n) dn \right\}. \quad (3.14)$$

En la última expresión hemos intercambiado el orden entre la suma y la integral. Esto está justificado debido a la convergencia absoluta en presencia de la función de corte.

Para seguir adelante usamos la fórmula de Euler-McLaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(n) dn = \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2!}B_2F'(0) - \frac{1}{4!}B_4F'''(0) + \dots \quad (3.15)$$

donde B_ν son los números de Bernoulli, en particular $B_2 = \frac{1}{6}$ y $B_4 = \frac{-1}{30}$.

Usando la definición de $F(n)$ dada por la ec.(3.14), podemos fácilmente calcular sus derivadas y evaluarlas en cero, el resultado es

$$F'(0) = 0, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = -4 + \mathcal{O}(1/k_c) \quad (3.16)$$

y todas las derivadas superiores son de orden $\mathcal{O}(1/k_c)$, por lo tanto no contribuyen en el límite $k_c \rightarrow \infty$. Solo el término que incluye $F'''(0)$ sobrevive en este límite, quedando para la energía de Casimir la siguiente expresión,

$$E_C(a) = \frac{-L^2\pi^2}{720a^3}. \quad (3.17)$$

Derivando (3.17) respecto a la distancia entre placas podemos encontrar la fuerza por unidad de área entre las mismas

$$\mathcal{F} = \frac{-\pi^2}{240a^4} = \frac{-0.013}{(a_{\mu m})^4} \text{ dyn/cm}^2. \quad (3.18)$$

y el signo corresponde a una fuerza atractiva; $a_{\mu m}$ representa la separación entre placas medida en micrones.

El resultado obtenido es muy importante ya que representa una consecuencia observable de las fluctuaciones cuánticas de vacío del campo electromagnético.

En muchos libros de texto se omiten las placas exteriores, y sólo se consideran las placas separadas una distancia a . Este tratamiento es incompleto ya que no se tiene en cuenta la energía de punto cero exterior a las placas.

El estudio del efecto Casimir puede también hacerse en el marco de una formulación local, es decir, en términos de la densidad de energía de vacío y de la presión de vacío. La misma comienza redefiniendo el tensor de energía-impulso del estado de vacío de acuerdo a (3.1),

$$\Theta_{\text{vac}}^{\mu\nu} = \langle 0 | \hat{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_{\partial\Gamma} - \langle 0 | \hat{T}^{\mu\nu} | 0 \rangle_0. \quad (3.19)$$

Dado que $T^{\mu\nu}$ es cuadrático en el campo, es posible escribirlo como el límite de coincidencia de funciones de dos puntos. Por lo tanto es posible expresar $\Theta_{\text{vac}}^{\mu\nu}$ en términos de la diferencia entre el propagador de campo libre y el correspondiente al campo con contornos. Luego de una extensa cuenta se llega al siguiente resultado,

$$\Theta_{\text{vac}}^{\mu\nu} = \frac{-\pi^2}{180a^4} \left(\frac{1}{4} g^{\mu\nu} + z^\mu z^\nu \right) \quad (3.20)$$

donde $z^\mu = (0, 0, 0, 1)$ es un cuadvivector tipo espacio ortogonal a las placas.

La normal de las placas esta en dirección z , por lo tanto la presión de vacío sobre ellas es simplemente Θ_{vac}^{33} . Y el resultado coincide con la fuerza por unidad de área dada por la ec.(3.18). Otra posibilidad es obtener la energía de Casimir (ver ec.(3.17)) multiplicando la densidad de energía Θ_{vac}^{00} por el volumen $L^2 a$.

3.3 Verificación experimental

A continuación haremos breve reseña mencionando los experimentos y resultados más importantes, llevados a cabo para verificar la validez de la fuerza de Casimir dada por la ec.(3.18).

La cantidad de trabajos teóricos acerca del Efecto Casimir sobrepasan en mucho a la cantidad experimental. Seguramente esto se debe a la dificultad de los experimentos respectivos, dada la pequeña magnitud de la fuerza, y también a la veracidad con que se acepta el resultado dado por la ec.(3.18), o a sus correcciones para materiales reales .

Hasta hace algunos años el experimento de Sparnaay , realizado en 1958, era considerado la principal verificación experimental de la fuerza de Casimir. En el se utilizaron placas metálicas; y se determinó el exponente de a , en la ec.(3.18), con un error ± 1 . Recientemente, dos nuevos experimentos han sido llevados a cabo, mejorándose notablemente la precisión alcanzada en el anterior. Los mismos se basan en el uso de un péndulo de torsión y un microscópio de fuerza atómica .

En ambos experimentos se utilizaron materiales dieléctricos en vez de placas metálicas, de forma tal de poder utilizar métodos ópticos para alinear las placas y también para determinar la distancia entre ellas. Con respecto a la alineación, se trabajó con una placa

plana y otra esférica, de modo que la geometría este completamente determinada por el radio de curvatura en el punto de máximo acercamiento, y la distancia entre placas en ese punto. Si el radio de curvatura es suficientemente grande, la fuerza de Casimir puede ser promediada sobre la separación variable entre las superficies. Esto lleva a la aproximación de Derjaguin o Teorema de Fuerza Proximidad, en el cual la fuerza de atracción es proporcional al radio de curvatura R por la energía por unidad de área,

$$F(a) = 2\pi R E(a) = 2\pi \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{3a^3}. \quad (3.21)$$

El experimento basado en un péndulo de torsión fue realizado por Lamoreaux en 1997

El rango de separación entre placas utilizado fue de $0.6\mu m$ a $6\mu m$, y la precisión alcanzada fue mayor al 10%. La principal limitación radicó en incertezas de calibración.

El dispositivo experimental utilizado resultó ser sumamente delicado, a punto tal de modificarse la calibración debido a la distorsión que el peso del autor provocaba sobre el piso del laboratorio. Si bien estas dificultades fueron superadas, el autor sugiere que una precisión mayor al 5%, con esta técnica, parece ser imposible de alcanzar.

Un experimento más reciente fue llevado a cabo por Mohideen en 1998 , empleando un microscopio de fuerza atómica . La precisión del dispositivo fue suficiente para determinar la fuerza con un error relativo del 1% a $r = 100\text{nm}$, y alrededor del 100% a $r = 900\text{nm}$. La sensibilidad en la medición con esta técnica fue menor que la lograda con el péndulo de torsión, pero el sistema es más estable y controlable al repetir las mediciones. La escasa sensibilidad reduce la máxima distancia medible a valores pequeños donde son más importantes las correcciones necesarias debidas, principalmente, a la conductividad finita de las placas o su rugosidad superficial. Sin embargo , es posible mejorar la sensibilidad; lo cual, sumado a un análisis teórico adecuado, llevaría a una precisión del 1% para distancias de $1\mu\text{m}$.