# Ecuaciones de onda relativista para una Partícula



• Algunas ecuaciones de la Rel. Especial:

- Vel. de la Luz es cte $\forall$ Sistema Inercial (SI): $c$
- Intervalo: $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$

(invariante frente a transformaciones de Lorentz)

$$ds^2 = \begin{cases} > 0 & \text{temporal} \\ = 0 & \text{nulo} \\ < 0 & \text{espacial} \end{cases}$$

- Coordenadas: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$\Rightarrow ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu \equiv dx_\mu dx^\mu = c\, dt^2 - d\vec{x}^2$$

- $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3$

donde $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

métrica de Minkowski (diagonal)

- $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

- $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

- Cuadrimomento: $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ ; $p_\mu = (\frac{E}{c}, -\vec{p})$

Invariante: $p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2$

$p^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \quad (c=1)$

$E = \gamma m c^2$

$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$

$p_\mu x^\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{r}$

# Ecuación de Klein-Gordon

La ec. de Schödinger $i\partial_t \Psi = \left[\frac{-\nabla^2}{2m} + V(x)\right]\Psi$ No es Inv. de Lorentz. Coord. espaciales y temporales aparecen no-cov.

Si integramos: $\int d^3x \, \underbrace{|\Psi|^2}_{\geq 0 \ ①} = 1$ (Indep. del tiempo) → la integral debe ser Indep. del tiempo ②

$\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$

① y ② se cumplen para la ec. de Schödinger

- Para una partícula no Rel.: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(x)$
- Para una partícula relativista: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$ "mass shell"

$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$ operadores

$$\left(-\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2\right)\phi = 0 \qquad (\hbar = c = 1)$$

↳ Versión Rel. de la ec. de Schödinger

$$\boxed{(\Box + m^2)\phi = 0}$$

Ecuación de Klein-Gordon.

Como una ec. de ondas, admite soluciones del tipo: $\phi_{(\vec{x},t)} = e^{-ip_\mu x^\mu} = e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

donde $E = \pm\omega_p = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Base completa de Sol. $E > 0$ y $E < 0$

Como para la ecuación del Schrödinger, la densidad de probabilidad está dado por: $\rho = \phi^* \phi$

y la corriente de probabilidad: $\vec{J} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)$

$\rho$ y $\vec{J}$ satisfacen: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

Tal que: $\frac{\partial}{\partial t}(\phi^*\phi) - \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*\right)$

$$= \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi^*\right)$$

$= 0$ donde usé la ec. de Schrödinger (y su conjugado).

- para ser totalmente Relativista $\rho$ no se transforma como la parte temporal de un cuadrivector, cuya parte espacial sería $\vec{J}$.

- El $\rho$ debe ser: $\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$ $\phi$ es sol. de la ec. de KG

y así tenemos

$\int d^3x\, |\phi|^2$ no se conserva

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) = \frac{i\hbar}{2m}\phi^*\left(\overleftrightarrow{\partial_0}, \overleftrightarrow{\nabla}\right)\phi$$

$\int d^3x\,(\phi^*\dot{\phi} - \dot{\phi}^*\phi) = C$

Indep. del $t \iff \dot{C} = 0$

$$\equiv \frac{i\hbar}{m}\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi$$

donde $A\overleftrightarrow{\partial^\mu}B = \frac{1}{2}\left(A\partial^\mu B - (\partial^\mu A)B\right)$

Con $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ podemos calcular: $\partial_\mu J^\mu$

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^* \Box \phi - \phi \Box \phi^*\right) = 0$$ (Porque $\phi^*$ también es sol. de KG)

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

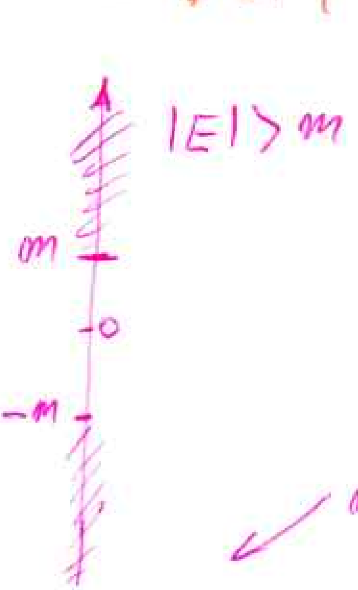
- Problemas: $\rho$ no es definida positiva → no podemos interpretarla como densidad de prob.

- Para una partícula libre, cuya energía es cte, uno puede elegir los estados de energía positiva e ignorar aquellos de energía negativa.
- Para partículas interactuantes, éstas intercambian energía con el entorno y entonces la energía no está acotada por debajo $\Rightarrow E^{\text{fundamental}} \longrightarrow -\infty$ No ocurre en la naturaleza.

↳ problemas para interpretar a la ec. de KG como una ec. de una sóla partícula.

↳ Si $\phi$ es un campo, se resuelve el problema.

Espectro de las sol. de KG




no acotado

Problemas de inestabilidad
Nada prohibe el decaimiento de cualquier estado por medio de emisión de radiación EM.

# Ecuación de Dirac



(1928) Interpretación
de ec. de onda rel. para una partícula de $s = 1/2$

- para resolver los problemas de la ec. de KG, Dirac buscó una ec. relativista que tuviera una derivada temporal $\partial_t$ (lineal), por lo que debería ser lineal en $\vec{\nabla}$ también (por covariancia).

- Podemos postular $i\,\partial_t \Psi = (i\bar{\alpha}\,\bar{\nabla} + \beta m)\Psi \longleftrightarrow (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta)\Psi$

donde $\Psi(\bar{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \\ \vdots \\ \Psi_N(\bar{x},t) \end{pmatrix}$ ; $\bar{\alpha}$ y $\beta$ deberían ser matrices de $N\times N$

admite → eSPINOR

- las soluciones $\Psi$ deben ser sol. de KG y ser compatibles con $E^2 = p^2 + m^2$.

- Queremos determinar $\alpha$ y $\beta$:

$$(i\partial_t + i\bar{\alpha}\,\vec{\nabla} - \beta m)\Psi = 0$$

← multiplico por $\times(-i\partial_t + i\bar{\alpha}\,\vec{\nabla} - \beta m)$

para obtener la ec. de KG.

o sea: $[\,\partial_t^2 + (i\bar{\alpha}\,\bar{\nabla} - \beta m)^2\,]\Psi = 0$

$$\underbrace{[\,\partial_t^2 - \bar{\alpha}\,\bar{\nabla}\,\bar{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta^2 m^2 - i m(\bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\alpha})\,]}_{\text{quiero que todo esto sea la ec. de KG: } (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\Psi = 0}\Psi = 0 .$$

Entonces necesitamos que:

- $m \neq 0$: $\beta^2 = \mathbb{1}$

$\bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\alpha} = 0 \leftrightarrow \{\bar{\alpha}, \beta\} = 0 \leftrightarrow \{\alpha^i, \beta\} = 0$

$i = 1, 2, 3$

(3 condiciones)

$\bar{\alpha}.\bar{\nabla}\ \bar{\alpha}.\vec{\nabla}$ debe ser $-\nabla^2$

$$" \alpha^i \alpha^j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2}\left(\{\alpha^i, \alpha^j\} + \underbrace{[\alpha^i, \alpha^j]}_{\text{tensor antisim}}\right)\partial_i \partial_j$$

$\nabla^2 = \partial_i \partial_j$

$\otimes$ tensor SIM

$= 0$

$$\Rightarrow\ = \frac{1}{2}\{\alpha^i, \alpha^j\}\partial_i \partial_j$$

$\therefore \{\alpha^i, \alpha^j\} = \delta ij$

$\longrightarrow \beta = \gamma^0$ y $\beta\bar{\alpha} = \bar{\gamma}$ donde: $\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i)$

- $m = 0$ no hace falta imponer $\beta^2 = \mathbb{1}$, $\{\bar{\alpha}, \beta\} = 0$

$\Rightarrow$ con $\alpha^\mu$: matrices de Pauli y $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi = 0}$$ Ecuación de Dirac

$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$ ; $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ $\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ -\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ Representación de Dirac

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times 4}$ ; $\gamma^\mu$: matrices de Dirac

La idea ahora es encontrar algo que pueda ser interpretado como la densidad de probabilidad: $\int d^3x \underbrace{\psi^\dagger_{(\vec{x},t)}\psi_{(\vec{x},t)}}_{>0} = cte$

Veamos que características cumple el spinor hermítico conjugado. Para eso, Tomo la transformada hermítica conjugada de la ec. de Dirac:

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\Psi = 0$$

$$\Psi^\dagger(-i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i - m) = 0$$

($\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ pq las mat. de Pauli no son hermíticas)

multiplico por $\gamma^0$ (a derecha): $\Psi^\dagger(-i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i - m)\gamma^0 = 0$

$[\gamma_0, \gamma_0] = 0$

$$\Rightarrow \Psi^\dagger\gamma^0[i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i + m) = 0$$

$\gamma^i, \gamma_0$ anticonmutan: $\gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = 0$

$\bar{\Psi}$ adjunto de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$

$$\Rightarrow \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$$

Por otro lado, $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$

$\Rightarrow$ si $\Psi$ es sol. de la ec de Dirac $\Rightarrow \boxed{J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}$ es una cantidad que se conserva

Si $\Psi$ es sol. $\Rightarrow \partial_\mu J^\mu = \bar{\Psi}\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\Psi}_{-im\Psi} + \overbrace{\underbrace{(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu}_{im\bar{\Psi}}\Psi}^{\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi} = 0$

si $\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow \int d^3x \underbrace{J^0(\vec{x},t)}_{\psi^\dagger\psi} = \underset{c}{\underset{\equiv}{cte}}$ $\Rightarrow P = J^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \psi^\dagger\psi > 0!$

$\frac{dc}{dt} = \int d^3x\, \underset{\text{pq } \partial_\mu J^\mu = 0}{\partial_0 J^0} = \int d^3x\,(-\partial_i J^i) \overset{\text{teo. de la divergencia}}{=}$ Integral en sup. Si las cantidades tienden a cero lo suficient. rápido

Sin embargo la otra dificultad subsiste. La ec. admite soluciones con energía negativa

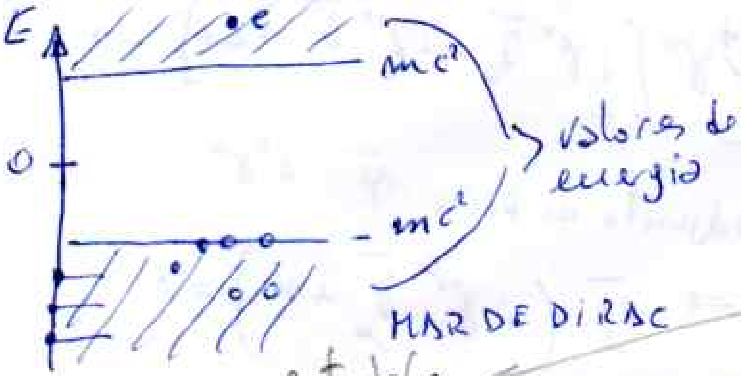
$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$ Supongamos $\Psi(\vec{x},t) = e^{-iEt}\,\underbrace{\Psi_0}_{\text{spinor cte}}$

$\Rightarrow (\gamma^0 E - m)\Psi_0 = 0 \Leftrightarrow \gamma^0\Psi_0 = \frac{m}{E}\Psi_0$

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \rightarrow$ autovalores $\pm 1$

$\frac{m}{E} = \pm 1 \rightarrow E = \pm m$ !!

Más general: $\Psi = e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Psi_0 \Rightarrow E = \pm\sqrt{m^2+p^2}$ (era de esperar, pq $\Psi$ tb es sol de la ec. de KG)




un $e^-$ podría saltar a estados de $E<0$ y liberar $\infty$ energía. Dirac propuso que en el estado fundamental (de vacío) todos los estados de $E<0$ están ocupados → estable

$\Rightarrow$ un $e^-$ no puede caer al mar (x el ppio de exclusión)

ese estado es lo que conocemos como estado de carga cero (vacío)

(Si nos quedamos con los estados $E>0$, no puedo tener $\Psi(\vec{x},t)$ muy localizadas. La misma idea que cuando mencionamos $\lambda_c$)

Si por algún motivo hay un $\underbrace{\text{sitio vacío}}_{\text{agujero}}$ en el mar

→ un $\gamma$ saca a un $e^-$ del mar: $\gamma \rightarrow ag + e^-$

ausencia de una part. con $E<0$, eso equivale a la presencia de una part. de $E>0$

$e^-$ + agujero → energía $\Rightarrow$ puede desexcitar y liberar energía

Si todos los estados del mar están llenos $\Rightarrow$ carga cero

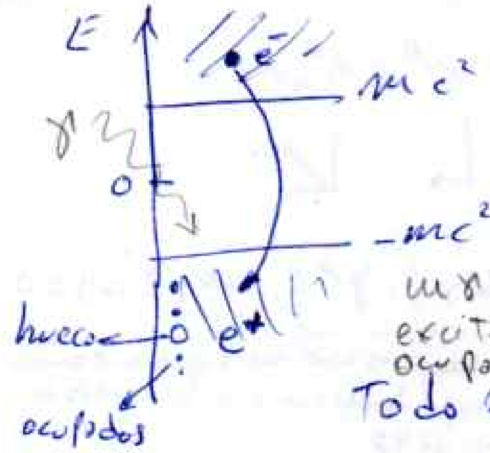
Si hay un hueco → presencia de una part con $E>0$ y $q = -q_e$

→ part. de $E>0$, carga opuesta $\equiv$ positrón !!

Ec. de Dirac → estados de energía negativa
→ espectro no acotado por debajo

Dirac resolvió el problema de la inestabilidad porque las partículas ahora son fermiones y entonces cumplen el principio de exclusión de Pauli
⇒ c/estado en el espectro puede ser ocupado a lo sumo por una partícula ⇒ estados con $E=m$ pueden ser estables si se asume que todos los estados de energía negativa están completos.
⇒ un $\gamma$ con $E>2m$ puede excitar uno de los $e^-$ que llenan los estados de energía negativa, dejando un agujero en el mar de Dirac. El hueco se comporta como una part. con igual masa y carga opuesta y se interpreta como el positrón.

→ Antipartículas!




$e^-$ decae en el hueco y ya no hay más carga, aniquilación de un par

$$e^+ + e^- \to \gamma$$

Predicción de Dirac

un $\gamma$ con $E>2m$ puede excitar uno de los $e^-$ y ocupa el mar de $E<0$ dejando un hueco $\Rightarrow e^+$

Todo muestra que no podemos interpretar a $\Psi$ como una función de onda.

Primero pensó p' era el protón (1930). En 1931 propuso el $e^+$ en 1932 fue encontrado!!

* En el límite No Rel., la ec. de Dirac $\to$ ec. de Pauli

(ejercicio)

en presencia de un campo EM: $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ la ec. de Dirac

es $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu \Rightarrow i\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m + e\phi\right)\Psi$

si $v/c \ll 1 \Rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ 2 comp $\quad \chi \ll \varphi$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\,\vec{B} + e\phi\right)\varphi$$ ec. de Pauli

$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \Rightarrow$ acoplamiento

$2\,\dfrac{e}{2m}\,\vec{S}\cdot\vec{B}$

factor giromagnético

"La otra predicción importante"