Teoría Clásica de Campos

2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Vamos a repasar primero el principio básico de la mecánica clásica para un sistema de N partículas en el formalismo lagrangiano. Este sistema tiene $3N$ grados de libertad descritos por un conjunto de coordenadas $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, 3N$.

El *lagrangiano* L es una función de las q_i y de sus derivadas respecto del tiempo $\dot{q}_i$, $L = L(q, \dot{q})$. Generalmente, $L(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q)$ (término cinético menos potencial). Supondremos que el sistema es conservativo, de modo que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. La *acción* S se define como

$$S = \int \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}). \tag{2.1}$$

El *principio de mínima acción* establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q_{\text{in}} = q(t_{\text{in}})$ y otro final $q_{\text{fi}} = q(t_{\text{fi}})$ *fijos* (figura 2.1) es un extremo (generalmente un mínimo) de la acción:

$$\delta S = \delta \int_{t_{\rm in}}^{t_{\rm fi}} \mathrm{d}t \; L(q,\dot{q}) = \int_{t_{\rm in}}^{t_{\rm fi}} \mathrm{d}t \; \delta L(q,\dot{q}) = 0. \tag{2.2}$$

Podemos desarrollar

$$\delta L = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i \right], \tag{2.3}$$

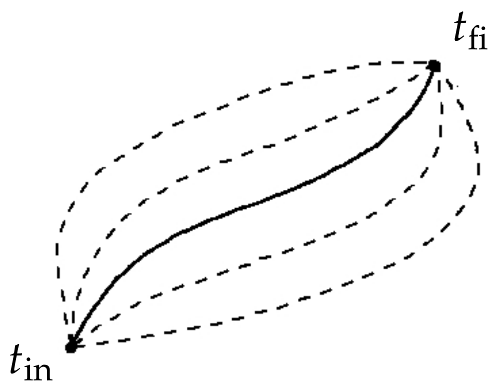

Figura 2.1: Posibles caminos $q_i(t)$ que puede seguir un sistema en el espacio de las coordenadas entre un instante inicial $t_{\rm in}$ y otro final $t_{\rm fi}$.

donde se ha usado que

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right)\delta\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i \tag{2.4}$$

siendo α un conjunto discreto de parámetros tal que $q_i = q_i(\alpha, t)$ es suficientemente suave de modo que las derivadas respecto a α y respecto a t conmutan, podemos discretizar ambas variaciones. Por otro lado, integrando por partes:[a]

$$\int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}}} - \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i. \tag{2.5}$$

Por tanto,

$$\delta S = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{fi}}} \mathrm{d}t\ \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad (\textit{Ecuaciones de Euler-Lagrange}) \tag{2.7}$$

Recordemos también que en el formalismo hamiltoniano el objeto básico es

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.8}$$

Diferenciando esta expresión obtenemos

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left\{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) \right\} \tag{2.9}$$

$$= \sum_i \{ \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i \} \tag{2.10}$$

donde se han usado las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.7) y la definición de momento en (2.8). Esto demuestra que el hamiltoniano H es una función de p y q. La expresión anterior conduce a:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad (\textit{ecuaciones de Hamilton}) \tag{2.11}$$

Definiendo ahora el *corchete de Poisson* de dos variables dinámicas cualesquiera f_1 y f_2

$$[f_1, f_2]_P = \sum_i \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right\} \tag{2.12}$$

es fácil comprobar que

$$[q_r, p_s]_P = \delta_{rs} \tag{2.13}$$

y las ecuaciones de Hamilton pueden reescribirse como

$$\dot{q}_r = [q_r, H]_P\ , \quad \dot{p}_r = [p_r, H]_P \tag{2.14}$$

y en general para cualquier variable dinámica f se tiene

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = [f, H]_P + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.15}$$

donde $\partial f/\partial t$ aparece si f depende explícitamente del tiempo.

Supongamos ahora que, en vez de un sistema con un número finito de grados de libertad, tenemos un *medio continuo*. Entonces el sistema viene descrito por un campo $\phi(x)$,

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(t, \boldsymbol{x}) = \phi(x) \tag{2.16}$$

y su dinámica por un lagrangiano,

$$L = \int \mathrm{d}^3x \ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2.17}$$

En adelante, llamaremos lagrangiano a la *densidad lagrangiana* $\mathcal{L}$. La acción es entonces

$$S = \int \mathrm{d}t \ L = \int \mathrm{d}^4x \ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2.18}$$

El principio de mínima acción se escribe:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi = 0, \tag{2.19}$$

donde la condición de contorno ahora no es que $q_i(t_{\text{in}})$ y $q_i(t_{\text{fi}})$ fijos sino que los campos permanecen constantes en el infinito,

$$\int \mathrm{d}^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \cancel{\int \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right]} - \int \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \tag{2.20}$$

y se ha usado el *teorema de Stokes*,

$$\int_V \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \int_\Sigma \mathrm{d}A \; n_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] \tag{2.21}$$

(n^μ es el vector normal a la superficie) y la mencionada condición de contorno

$$\delta\phi|_\Sigma = 0. \tag{2.22}$$

Así que tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \quad (\textit{Ecuación de Euler-Lagrange para el campo } \phi). \tag{2.23}$$

Nótese que si se añade al lagrangiano un término de la forma (derivada total)

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu(\phi) \tag{2.24}$$

las ecuaciones de movimiento no cambian debido a la condición de contorno de que los campos sean constantes en el infinito, usando de nuevo el teorema de Stokes,

$$\int_V \mathrm{d}^4x \, \partial_\mu K^\mu = \int_\Sigma \mathrm{d}A \; n_\mu K^\mu, \tag{2.25}$$

se añade una constante a la acción y la ecuación (2.2) queda inalterada.

En el formalismo hamiltoniano definimos el *momento conjugado del campo* ϕ,

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \tag{2.26}$$

y la densidad hamiltoniana (o simplemente hamiltoniano),

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(x) \tag{2.27}$$

siendo,

$$H = \int \mathrm{d}^3x \; \mathcal{H}(x). \tag{2.28}$$

2.2 Teorema de Noether

Vamos a discutir la relación existente entre *simetrías continuas* y *leyes de conservación* en teoría clásica de campos.

Una transformación infinitesimal *global*, i.e. con $|\epsilon^a| \ll 1$ independiente de las coordenadas, de los campos ϕ_i de lo que depende la acción $S(\phi)$ se escribe

$$\phi_i(x) \mapsto \phi_i'(x') \equiv \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \tag{2.29}$$

y para las coordenadas

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x), \tag{2.30}$$

donde "a" puede ser un índice, dos, ... o ninguno. Decimos que esta transformación es una *simetría* si deja invariantes las ecuaciones del movimiento, i.e. si la acción no varía:

$$S(\phi) \mapsto S(\phi') = S(\phi). \tag{2.31}$$

Entonces, a primer orden en δx,

$$0 = S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x'\ \mathcal{L}'(x') - \int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(x) = \int \mathrm{d}^4x \left[\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right], \tag{2.32}$$

donde se ha usado

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| d^4x, \quad \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \cdots \\ \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1+\frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x)^2. \tag{2.33}$$

Ahora bien, como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) + \mathcal{O}(\delta x)^2 \tag{2.34}$$

y $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)$, la ecuación (2.32) queda

$$0 = \int d^4x \left\{\delta\mathcal{L}(x) + \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L}(x)\right]\right\}. \tag{2.35}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x) &= \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right] \\ &= \sum_i \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.36}$$

y a partir de

$$\phi_i'(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x'^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} \tag{2.37}$$

tenemos

$$\phi_i'(x) = \phi_i(x^\mu - \epsilon^a A_a^\mu) + \epsilon^a F_{i,a} = \phi_i(x) - \epsilon^a A_a^\mu \partial_\mu \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a} \tag{2.38}$$

de modo que

$$\delta\phi_i(x) = \phi_i'(x) - \phi_i(x) = -\epsilon^a [A_a^\mu \partial_\mu \phi_i(x) - F_{i,a}] \tag{2.39}$$

Por tanto, *si* $\phi = \phi_{\mathrm{cl}}$ *es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange*, (2.35) queda

$$0 = \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i + \delta x^\mu \mathcal{L}(x) \right] \tag{2.40}$$

y sustituyendo δx^μ de (2.30) y $\delta\phi$ de (2.39) tenemos

$$0 = \epsilon^a \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\mathrm{cl}}), \tag{2.41}$$

donde

$$\boxed{j_a^\mu(\phi) \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \left[A_a^\nu(x) \partial_\nu \phi_i(x) - F_{i,a}(\phi, \partial\phi) \right] - A_a^\mu(x) \mathcal{L}(x)} \tag{2.42}$$

Supongamos por un momento que hacemos una transformación *local*, $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$, sobre esta acción invariante solo bajo transformaciones globales. Entonces no quedará invariante sino que

$$S(\phi') = S(\phi) + \int \mathrm{d}^4x[\epsilon^a(x)K_a(\phi) - (\partial_\mu\epsilon^a)j_a^\mu(\phi)] + \mathcal{O}(\partial\partial\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.43}$$

donde el coeficiente $K_a(\phi)$ es cero, porque en el caso particular de ϵ^a constantes la invariancia global implica $\int \mathrm{d}^4x\ K_a(\phi) = 0$, para cualquier ϕ. Veamos por qué hemos llamado precisamente $-j_a^\mu(\phi)$ al otro coeficiente. Si los $\epsilon^a(x)$ van suficientemente rápido a cero en el infinito, podemos deducir del teorema de Stokes que

$$\int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu\left(\epsilon^a j_a^\mu(\phi)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu\epsilon^a)j_a^\mu(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x)\partial_\mu j_a^\mu(\phi) \tag{2.44}$$

de donde

$$S(\phi') - S(\phi) = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x)\partial_\mu j_a^\mu(\phi). \tag{2.45}$$

Ahora bien, si tomamos en particular $\phi = \phi_{\mathrm{cl}}$, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es un extremo de la acción, la ecuación anterior expresa una variación lineal de la acción en torno a ese extremo y por tanto se anula. Es decir,

$$0 = \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^a(x)\partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\mathrm{cl}}). \tag{2.46}$$

Como esto ocurre para cualquier $\epsilon^a(x)$, tenemos que

$$\partial_\mu j_a^\mu(\phi_{\mathrm{cl}}) = 0, \tag{2.47}$$

es decir, $j_a^\mu(\phi_{\mathrm{cl}})$ son *corrientes conservadas*. Así que (2.41) no solo implica que la integral se anula, sino también el integrando.

Si definimos las *cargas*

$$Q_a \equiv \int \mathrm{d}^3x \; j_a^0(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.48}$$

vemos que la conservación de la corriente $j_a^\mu(x)$ implica que la carga Q_a se conserva, i.e. es independiente del tiempo, pues

$$\partial_t Q_a = \int \mathrm{d}^3x \; \partial_0 j_a^0(t, \boldsymbol{x}) = -\int \mathrm{d}^3x \; \partial_i j_a^i(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{2.49}$$

ya que los campos decrecen suficientemente rápido en el infinito (de nuevo el teorema de Stokes).

Las simetrías pueden ser *internas*, si no cambian las coordenadas, i.e. $A_a^\mu(x) = 0$, o *espaciotemporales*. La conservación de la carga eléctrica, el isoespín, el número bariónico, etc., son consecuencias de las primeras. Veamos ahora todos los ejemplos de las segundas: invariancias bajo traslaciones espaciotemporales, rotaciones y *boosts*.

Traslaciones espaciotemporales

Vienen dadas por las siguientes transformaciones de coordenadas y campos (cualquier componente, si tienen alguna):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad \Rightarrow \quad \epsilon^a = \epsilon^\nu, \quad A_a^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \tag{2.50}$$

$$\phi_i(x) \mapsto \phi_i'(x') = \phi_i(x) \quad \Rightarrow \quad F_{i,a}(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{2.51}$$

Por tanto, hay cuatro corrientes conservadas que conforman el *tensor energía-momento*,

$$\theta^\mu{}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu \theta^\mu{}_\nu = 0 \tag{2.52}$$

y cuatro "cargas" que permanecen constantes, la *energía* y las tres componentes del *momento*,

$$P_\nu = \int \mathrm{d}^3x \, \theta^0{}_\nu = \int \mathrm{d}^3x \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^0 \mathcal{L} \right]. \tag{2.53}$$

Es decir, la invariancia bajo traslaciones espaciotemporales implica la conservación del cuadrimomento,

$$\partial_t P^\nu = 0\ , \quad \nu = 0, 1, 2, 3\ . \tag{2.54}$$

Rotaciones y boosts

Consideremos por simplicidad un campo escalar. Las transformaciones de Lorentz son de la forma

$$\begin{aligned} x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \quad &\Rightarrow \quad \epsilon^a = \omega^{\rho\sigma} = -\omega^{\sigma\rho}, \\ &\quad\;\; A^\mu_a(x) = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)x_\nu \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x) \quad \Rightarrow \quad F_a(\phi) = 0. \tag{2.56}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} j^\mu{}_{\rho\sigma} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho x_\sigma - \delta^\nu_\sigma x_\rho)\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi x_\sigma - \partial_\sigma\phi x_\rho) - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho)\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta^\mu{}_\rho x_\sigma - \theta^\mu{}_\sigma x_\rho\right), \quad \partial_\mu j^\mu{}_{\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Es decir, el siguiente tensor contiene seis corrientes conservadas:

$$T^{\mu\rho\sigma} \equiv -(\theta^{\mu\rho}x^{\sigma} - \theta^{\mu\sigma}x^{\rho}), \quad \partial_\mu T^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{2.58}$$

y hay seis cargas o constantes del movimiento,

$$M^{\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x\ T^{0\rho\sigma} = \int \mathrm{d}^3x\ (x^{\rho}\theta^{0\sigma} - x^{\sigma}\theta^{0\rho}), \quad \partial_t M^{\rho\sigma} = 0. \tag{2.59}$$

de las cuales M^{ij} (momento angular) se deben a la invariancia bajo rotaciones y M^{0i} a la invariancia bajo *boosts*.

. Nótese que la ecuación (2.58) implica que el tensor energía-momento debe ser simétrico, pues $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$ y

$$0 = \partial_\mu(x^{\rho}\theta^{\mu\sigma} - x^{\sigma}\theta^{\mu\rho}) = x^{\rho}\partial_\mu\theta^{\mu\sigma} - x^{\sigma}\partial_\mu\theta^{\mu\rho} + \theta^{\mu\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} - \theta^{\mu\rho}\delta^{\sigma}_{\mu} = \theta^{\rho\sigma} - \theta^{\sigma\rho}. \tag{2.60}$$

Como el $\theta^{\mu\nu}$ definido en (2.52) no es necesariamente simétrico, hay que añadirle una derivada total de la forma $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$, con $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, para que

$$\widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad \partial_\mu\widetilde{\theta}^{\mu\nu} = \partial_\mu\theta^{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0 \tag{2.61}$$

y como

$$\int \mathrm{d}^3x\ \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\ \partial_i f^{i0\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{\nu} = \int \mathrm{d}^3x\ \widetilde{\theta}^{0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\ \theta^{0\nu}, \tag{2.62}$$

las cargas conservadas son las mismas, siempre que los campos, de los que depende f, se anulen suficientemente rápido en el infinito.