

2 Campos escalares

Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos para empezar un campo escalar real, $\phi(x) = \phi^*(x)$. Una acción que describa una dinámica no trivial del campo debe contener derivadas, $\partial_\mu \phi$. Los índices Lorentz deben estar contraídos, pues la acción es un escalar. La acción más sencilla es

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (2.64)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para ϕ es entonces la *ecuación de Klein-Gordon*,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (2.65)$$

Sus soluciones son ondas planas, $e^{\pm i p x}$, con $p x \equiv p_\mu x^\mu$ y $p^2 \equiv p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. El parámetro m es la masa, que por definición tomaremos $m > 0$. La solución más general de la ecuación de Klein-Gordon es por tanto,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-i p x} + a_p^* e^{i p x} \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \quad (2.66)$$

La normalización de los campos se ha elegido por conveniencia. Vemos que entre las soluciones hay *modos de energía positiva* (e^{-ipx}) y *modos de energía negativa* (e^{+ipx}), cuya interpretación surgirá solo al cuantizar el campo. El signo de la acción se ha elegido de modo que obtengamos un hamiltoniano definido positivo:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \Pi_\phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] > 0. \quad (2.67)$$

El tensor energía-momento es directamente simétrico,

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.68)$$

y, en efecto, $\mathcal{H} = \theta^{00}$. En cuanto a las cargas conservadas asociadas a las rotaciones,

$$M^{ij} = \int d^3x (x^i \theta^{0j} - x^j \theta^{0i}) \quad (2.69)$$

Si definimos el producto escalar de dos campos reales como

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \equiv \frac{i}{2} \int d^3x \, \phi_1 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_2, \quad f \overset{\leftrightarrow}{\partial} g \equiv f \partial g - \partial f g, \quad (2.72)$$

tenemos que

$$M^{ij} = \langle \phi | L^{ij} | \phi \rangle, \quad (2.73)$$

que es lo que uno esperaría, pues L^{ij} es la representación del operador J^{ij} sobre el espacio vectorial de los campos.

Veamos que $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ es independiente del tiempo si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, lo que está de acuerdo con que M^{ij} es una cantidad conservada. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \partial_0 \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle &= \frac{i}{2} \int d^3x \partial_0 [\phi_1 \partial_0 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \phi_2] \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 + \phi_1 \partial_0^2 \phi_2 - \partial_0^2 \phi_1 \phi_2 - \partial_0 \phi_1 \partial_0 \phi_2 \} \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ \phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \nabla^2 \phi_1 \phi_2 - m^2 \phi_1 \phi_2 + m^2 \phi_1 \phi_2 \} \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3x \{ -\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 \} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

donde se ha usado

$$\begin{aligned}
(\square + m^2)\phi_{1,2} = 0 &\Rightarrow \partial_0^2 \phi_{1,2} = \nabla^2 \phi_{1,2} - m^2 \phi_{1,2} \\
\int d^3x \nabla \cdot (\phi_{1,2} \nabla \phi_{2,1}) = 0 &\Rightarrow \int d^3x \phi_{1,2} \nabla^2 \phi_{2,1} = - \int d^3x \nabla \phi_{1,2} \cdot \nabla \phi_{2,1}.
\end{aligned} \quad (2.75)$$

Análogamente, podemos escribir

$$P^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu} = \langle \phi | i\partial^\mu | \phi \rangle. \quad (2.76)$$

En efecto, usando de nuevo la ecuación de Klein-Gordon e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
P^0 = \langle \phi | i\partial^0 | \phi \rangle &= \langle \phi | i\partial_0 | \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \partial_0^2 \phi - (\partial_0 \phi)^2] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \nabla^2 \phi - m^2 \phi^2 - (\partial_0 \phi)^2] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x [(\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 + (\partial_0 \phi)^2] = \int d^3x \theta^{00}, \quad (2.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^i = \langle \phi | i\partial^i | \phi \rangle &= -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi \partial^i \partial_0 \phi - \partial_0 \phi \partial^i \phi] \\
&= \int d^3x \partial^i \phi \partial_0 \phi = \int d^3x \theta^{i0} = \int d^3x \theta^{0i}. \quad (2.78)
\end{aligned}$$

Y también,

$$M^{0i} = \langle \phi | L^{0i} | \phi \rangle = \int d^3x (x^0 \theta^{0i} - x^i \theta^{00}). \quad (2.79)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} M^{0i} &= \langle \phi | L^{0i} | \phi \rangle = -\frac{1}{2} \int d^3x [\phi(x^0 \partial^i - x^i \partial^0) \partial_0 \phi - \partial_0 \phi (x^0 \partial^i - x^i \partial^0) \phi] \\ &= \int d^3x \left\{ x^0 \partial_0 \phi \partial^i \phi + \frac{x^i}{2} [\phi \partial_0^2 \phi - (\partial_0 \phi)^2] \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ x^0 \partial_0 \phi \partial^i \phi - \frac{x^i}{2} [(\partial_0 \phi)^2 - \phi \nabla^2 \phi + m^2 \phi^2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Nótese que, como habíamos anticipado, $L^{\mu\nu}$ y $i\partial^\mu$ son operadores hermíticos, por lo que tenemos una representación unitaria de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Así que $M^{\mu\nu}$ y P^μ son cantidades reales.

Finalmente, podemos generalizar la acción de Klein-Gordon para incluir interacciones del campo escalar introduciendo un potencial $V(\phi)$,

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] - V(\phi) \right\}. \quad (2.81)$$

Términos proporcionales a ϕ^3 , ϕ^4 , ... en el potencial dan lugar a contribuciones no lineales en las ecuaciones de movimiento, que corresponden a auto-interacciones del campo:^b

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.82)$$

Campos complejos. Conservación de la carga

Supongamos ahora un campo escalar complejo,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (2.83)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son dos campos reales con la misma masa m . Entonces

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2) + \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2) \\ &= \int d^4x \mathcal{L}(x). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Está claro que la ecuación de Klein-Gordon para ϕ es la misma que (2.65), pues tanto la parte real como la imaginaria la satisfacen. La solución más general es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ipx} + b_p^* e^{ipx} \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv \sqrt{m^2 + p^2}} \quad (2.85)$$

^b Añadir un término lineal $c^3\phi$ al potencial es equivalente a reparametrizar $\phi \rightarrow \phi - c^3/m^2$, que conduce a la misma dinámica.

La acción de este campo complejo es invariante bajo las transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{-i\theta} \phi(x), \quad \phi^*(x) \mapsto \phi'^*(x) = e^{i\theta} \phi^*(x) \quad (2.86)$$

lo que significa que existe una corriente conservada asociada (tomar $\phi_i = (\phi, \phi^*)$):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu \quad \Rightarrow \quad A_a^\mu(x) = 0 \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &\mapsto \phi'(x) = \phi(x) - i\theta\phi(x) \\ \phi^*(x) &\mapsto \phi'^*(x) = \phi^*(x) + i\theta\phi^*(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \epsilon^a = \theta, \quad \begin{aligned} F_{\phi,a} &= -i\phi \\ F_{\phi^*,a} &= i\phi^* \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} F_{\phi,a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} F_{\phi^*,a} = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = i\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi. \quad (2.89)$$

La carga conservada es

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x \phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi = \langle \phi | \phi \rangle, \quad \partial_t Q = 0, \quad (2.90)$$

consistente con que el generador de las simetrías $e^{-i\theta}$ es el operador identidad y definiendo el producto escalar de dos campos complejos ϕ_A y ϕ_B como

$$\langle \phi_A | \phi_B \rangle \equiv i \int d^3x \phi_A^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_B. \quad (2.91)$$

Campos espinoriales

Ecuación de Weyl

Consideremos espinores de Weyl ψ_R y ψ_L . Entonces

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (2.92)$$

con $\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$, son cuadvectores Lorentz. Para demostrar esto recordemos que

$$\psi_R \mapsto \exp \left\{ (-i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right\} \psi_R. \quad (2.93)$$

Consideremos, por ejemplo, un *boost* infinitesimal de *rapidity* η en la dirección x ,

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^1}{2} \sigma^\mu \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^1}{2} \psi_R \\ \Rightarrow \quad \psi_R^\dagger \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \psi_R + \eta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\ \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + \eta \delta^{i1} \psi_R^\dagger \psi_R, \end{aligned} \quad (2.94)$$

pues $\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$. Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo ese *boost* igual que un cuadvector v^μ ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Consideremos ahora una rotación infinitesimal θ alrededor del eje z ,

$$\begin{aligned}
\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R + i\theta \psi_R^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \sigma^\mu \psi_R - i\theta \psi_R^\dagger \sigma^\mu \frac{\sigma^3}{2} \psi_R \\
\Rightarrow \quad \psi_R^\dagger \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \psi_R \\
\psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R - \theta \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R \\
\psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R + \theta \psi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R \\
\psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R &\mapsto \psi_R^\dagger \sigma^3 \psi_R,
\end{aligned} \tag{2.96}$$

pues $\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k$. Vemos que $\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ se transforma bajo esa rotación igual que un cuadvivector v^μ ,

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}. \tag{2.97}$$

Y análogamente para $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$.

Concentrémonos en ψ_L . Podemos construir la acción más sencilla para estos campos,^c

$$S = i \int d^4x \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = \int d^4x \mathcal{L}(x). \tag{2.98}$$

El factor i se introduce para que el lagrangiano sea hermítico. Hallemos sus ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando ψ_L y ψ_L^* como campos independientes:

$$\begin{aligned}
[\psi_L^*] : \quad i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L &= 0 \\
[\psi_L] : \quad -i\partial_\mu \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu &= 0
\end{aligned} \Rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0. \tag{2.99}$$

Esta *ecuación de Weyl* para ψ_L es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon *sin masa* para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_L = \sigma^i \partial_i \psi_L \quad \Rightarrow \quad \partial_0^2 \psi_L = \nabla^2 \psi_L \quad \Rightarrow \quad \square \psi_L = 0 \quad (2.100)$$

y además aporta información sobre la helicidad de los distintos modos del campo. Si tomamos un *modo de energía positiva (negativa)* de ψ_L ,

$$\psi_L(x) = u_L e^{-ipx} \quad (u_L e^{ipx}) \quad (2.101)$$

con u_L un espinor constante y $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ donde $E = |\mathbf{p}|$ (masa cero), recordando que

$$\mathbf{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}) u_L = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_L \equiv h u_L \quad (2.102)$$

vemos que

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) u_L e^{\mp i p x} = \mp i (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_L e^{\mp i p x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} u_L = -u_L, \quad (2.103)$$

^c Acabamos de probar que $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \mapsto \Lambda^\mu_\rho \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho \psi_L = \psi_L^\dagger \Lambda^\mu_\rho \bar{\sigma}^\rho \psi_L$, pues Λ y $\bar{\sigma}$ actúan en distintos espacios. Por otro lado, $\partial_\mu \mapsto \Lambda_\mu^\sigma \partial_\sigma$. Entonces, el siguiente término es un escalar Lorentz

$$\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \mapsto \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\mu^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\rho g_\rho^\sigma \partial_\sigma \psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L.$$

lo que significa que los modos de ψ_L son todos de *helicidad negativa* $h = -\frac{1}{2}$. Por otro lado, el tensor energía-momento es

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} \partial^\nu \psi_L - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \psi_L, \quad (2.104)$$

donde se ha usado que para los campos que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange (2.99) el lagrangiano $\mathcal{L} = 0$. El hamiltoniano es $\mathcal{H} = \theta^{00} = i\psi_L^\dagger \partial^0 \psi_L$. Además la acción es invariante bajo transformaciones globales de simetría del grupo U(1),

$$\psi_L \mapsto e^{-i\theta} \psi_L, \quad (2.105)$$

así que existe una corriente conservada

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_L)} i\psi_L = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.106)$$

y una carga conservada

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi_L^\dagger \psi_L, \quad \partial_t Q = 0. \quad (2.107)$$

Análogamente puede verse que la *ecuación de Weyl* para ψ_R es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial_0 + \sigma^i \partial_i) \psi_R = 0, \quad (2.108)$$

que es equivalente a una ecuación de Klein-Gordon sin masa para sus dos componentes,

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R \quad \Rightarrow \quad \partial_0^2 \psi_R = \nabla^2 \psi_R \quad \Rightarrow \quad \square \psi_R = 0. \quad (2.109)$$

Los modos de ψ_R tienen *helicidad positiva* $h = \frac{1}{2}$. El tensor energía-momento, la corriente y la carga conservada correspondientes son, respectivamente,

$$\theta^{\mu\nu} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial^\nu \psi_R, \quad j^\mu = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad Q = \int d^3x \psi_R^\dagger \psi_R. \quad (2.110)$$

Ecuación de Dirac

Nótese que, bajo una transformación de Lorentz,

$$\psi_L \mapsto \Lambda_L \psi_L, \quad \psi_R \mapsto \Lambda_R \psi_R, \quad \text{y } \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = \Lambda_R^\dagger \Lambda_L = \mathbb{1}. \quad (2.111)$$

Por tanto, $\psi_L^\dagger \psi_R$ y $\psi_R^\dagger \psi_L$ son escalares Lorentz.

Bajo paridad ($\psi_L \leftrightarrow \psi_R$) las siguientes combinaciones hermíticas se transforman:

$$\begin{aligned} (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (\text{escalar}) \\ i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) &\mapsto -i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (\text{pseudoescalar}) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Así que el *lagrangiano de Dirac*,

$$\mathcal{L}_D = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (2.113)$$

es invariante bajo paridad. El lagrangiano de Weyl no lo es. Hallemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
[\psi_L^*] : & \quad i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0 \\
[\psi_L] : & \quad -i\partial_\mu \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu - m\psi_R^\dagger = 0 \\
[\psi_R^*] : & \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0 \\
[\psi_R] : & \quad -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu - m\psi_L^\dagger = 0
\end{aligned}
\Rightarrow \begin{aligned}
& i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R \\
& i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L,
\end{aligned} \quad (2.114)$$

que es la *ecuación de Dirac* en términos de espinores de Weyl. Nótese que ψ_L y ψ_R *ya no son autoestados de helicidad* y que las dos componentes de ψ_L y también las de ψ_R satisfacen una ecuación de Klein-Gordon de masa m , pues

$$\begin{aligned}
i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R & \Rightarrow (i\sigma^\nu \partial_\nu) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m i\sigma^\nu \partial_\nu \psi_R \\
& \Rightarrow -\frac{1}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \psi_L = m^2 \psi_L \\
& \Rightarrow (\square + m^2) \psi_L = 0,
\end{aligned} \quad (2.115)$$

donde se ha usado (2.108) y la identidad $\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Lo mismo ocurre para ψ_R ,

$$(\square + m^2) \psi_R = 0. \quad (2.116)$$

Es conveniente introducir el *campo de Dirac*, de 4 componentes,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad (\text{representación quiral}) \quad (2.117)$$

y definir las *matrices gamma de Dirac*,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{representación quiral}), \quad (2.118)$$

que satisfacen el *álgebra de Clifford*,

$$\{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.119)$$

La ecuación de Dirac queda entonces

$$(\mathbf{i}\partial - m)\psi = 0, \quad \not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu. \quad (2.120)$$

También podemos escribir el lagrangiano de Dirac de forma compacta introduciendo

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{espinor adjunto}). \quad (2.121)$$

En la representación quirál, $\bar{\psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$ y

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(\mathbf{i}\partial - m)\psi. \quad (2.122)$$

También se define la matriz $\gamma_5 \equiv \mathbf{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ que es

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{representación quirál}) \quad (2.123)$$

Por tanto, los operadores

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (2.124)$$

proyectan sobre los espinores de Weyl ψ_L y ψ_R , respectivamente,

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

Pueden elegirse otras representaciones,

$$\psi'(x) = U\psi(x), \quad \gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger, \quad \bar{\psi}'(x) = \psi'^\dagger(x)\gamma'^0, \quad (2.126)$$

donde U es una matriz unitaria constante. De este modo,

$$\mathcal{L}_D = \psi'^\dagger U \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) U^\dagger \psi' = \bar{\psi}' (i\gamma'^\mu \partial_\mu - m) \psi', \quad (2.127)$$

tiene la misma forma que el lagrangiano original. Además el álgebra de Clifford permanece invariante, $\{\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu\} = 2g^{\mu\nu}$. Una representación que se usa con frecuencia es la *representación estándar* o *representación de Dirac*, que se obtiene a partir de la quiral mediante

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

El campo y las matrices de Dirac quedan

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix}, \quad (2.129)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.130)$$

La representación de Dirac resulta cómoda en el límite no relativista, mientras que la quiral es más conveniente en el límite ultrarrelativista.

La solución general de la ecuación de Dirac es una superposición de ondas planas,

$$\psi(x) \equiv u(\mathbf{p})e^{-ipx} \text{ (modos de energía positiva } E > 0), \quad (2.131)$$

$$\psi(x) \equiv v(\mathbf{p})e^{ipx} \text{ (modos de energía negativa } -E < 0), \quad E = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (2.132)$$

Aplicando (2.120) a estas soluciones tenemos

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.133)$$

Halleemos ahora la forma explícita de estas soluciones en la representación quiral:

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_L(\mathbf{p}) \\ u_R(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_L(\mathbf{p}) \\ v_R(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Tomemos primero el caso $m \neq 0$. Entonces, en el sistema de referencia en reposo,

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

$$(\not{p} - m)u(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 - 1)u(0) = 0 \Rightarrow u_L(0) = u_R(0), \quad (2.135)$$

$$(\not{p} + m)v(0) = 0 \Rightarrow (\gamma^0 + 1)v(0) = 0 \Rightarrow v_L(0) = -v_R(0). \quad (2.136)$$

Entonces, centrándonos en el *espinor de energía positiva* $u(\mathbf{p})$, podemos elegir

$$u_L^{(s)}(0) = u_R^{(s)}(0) = \sqrt{m} \xi^{(s)}, \quad s \in \{1, 2\}, \quad \xi^{(r)\dagger} \xi^{(s)} = \delta_{rs},$$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Las soluciones para $\mathbf{p}$ arbitrario se hallan haciendo un *boost* en la dirección $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$,

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} u_L^{(s)}(0) \\ e^{+\frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

Desarrollando las exponenciales,

$$e^{\pm \eta \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \eta^{2k} \pm \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \eta^{2k+1}$$

$$= \cosh \eta \pm \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh \eta = \frac{1}{m} (E \pm \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.139)$$

donde se ha sustituido

$$\cosh \eta = \gamma = \frac{E}{m}, \quad \sinh \eta = \gamma \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \quad (2.140)$$

e insertando

$$(p\sigma) = p_\mu \sigma^\mu = E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (p\bar{\sigma}) = p_\mu \bar{\sigma}^\mu = E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.141)$$

obtenemos

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} u_L^{(s)}(0) \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})} u_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} \xi^{(s)} \\ \sqrt{(p\bar{\sigma})} \xi^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Otra forma de escribir estas soluciones es

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E + |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right] \xi^{(s)} \\ \left[\sqrt{E + |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right] \xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

donde se ha usado,

$$e^{\pm \frac{\eta}{2} \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cosh \frac{\eta}{2} \pm \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh \frac{\eta}{2} = e^{\frac{\eta}{2}} \left(\frac{1 \pm \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + e^{-\frac{\eta}{2}} \left(\frac{1 \mp \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \quad (2.144)$$

$$e^{\pm \frac{\eta}{2}} = \sqrt{\cosh \eta \pm \sinh \eta} = \sqrt{\gamma \pm \gamma \beta} = \sqrt{\frac{E \pm |\mathbf{p}|}{m}}. \quad (2.145)$$

Si hacemos el *límite ultrarrelativista* ($E \gg m$), $p^\mu \rightarrow (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\mathbf{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \xi^{(1)} \\ (1 + \sigma^3) \xi^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{(1)} \end{pmatrix} \\ u^{(2)}(\mathbf{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \xi^{(2)} \\ (1 + \sigma^3) \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \xi^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.146)$$

vemos que $u^{(1)}$ solo tiene componente *right-handed* y $u^{(2)}$ solo tiene componente *left-handed*, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida (quiralidad), como corresponde a campos de *masa nula*.

Si repetimos el procedimiento para el *espinor de energía negativa* $v(\mathbf{p})$ obtenemos

$$v^{(s)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} v_L^{(s)}(0) \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})} v_R^{(s)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)} \eta^{(s)} \\ -\sqrt{(p\bar{\sigma})} \eta^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \eta^{(r)\dagger} \eta^{(s)} = \delta_{rs}, \quad (2.147)$$

o bien

$$v^{(s)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E + |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right] \eta^{(s)} \\ - \left[\sqrt{E + |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) + \sqrt{E - |\mathbf{p}|} \left(\frac{1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \right] \eta^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Resulta conveniente elegir (véase discusión al final de §3.2.1)

$$\eta^{(s)} = -i\sigma^2 \bar{\zeta}^{(s)*} \Rightarrow \eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

Entonces, en el *límite ultrarrelativista* ($E \gg m$), $p^\mu \rightarrow (E, 0, 0, E)$,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\mathbf{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \eta^{(1)} \\ -(1 + \sigma^3) \eta^{(1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^{(2)}(\mathbf{p}) &\rightarrow \sqrt{\frac{E}{2}} \begin{pmatrix} (1 - \sigma^3) \eta^{(2)} \\ -(1 + \sigma^3) \eta^{(2)} \end{pmatrix} = -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

lo que significa que $v^{(1)}$ solo tiene componente *left-handed* y $v^{(2)}$ solo tiene componente *right-handed*, es decir son campos de Dirac con helicidad bien definida y *masa nula*.

Introduciendo ahora los correspondientes espinores adjuntos,^d

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0, \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0, \quad (2.151)$$

que satisfacen las ecuaciones de Dirac,

$$\bar{u}(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0, \quad \bar{v}(\mathbf{p})(\not{p} + m) = 0, \quad (2.152)$$

pueden demostrarse las siguientes *relaciones de ortonormalidad*,

$$\bar{u}^{(r)}(\mathbf{p})u^{(s)}(\mathbf{p}) = 2m\delta_{rs}, \quad \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p})v^{(s)}(\mathbf{p}) = -2m\delta_{rs} \quad (2.153)$$

$$u^{(r)\dagger}(\mathbf{p})u^{(s)}(\mathbf{p}) = 2E_p\delta_{rs}, \quad v^{(r)\dagger}(\mathbf{p})v^{(s)}(\mathbf{p}) = 2E_p\delta_{rs}, \quad (2.154)$$

$$\bar{u}^{(r)}(\mathbf{p})v^{(s)}(\mathbf{p}) = \bar{v}^{(r)}(\mathbf{p})u^{(s)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.155)$$

y las *relaciones de completitud*,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(s)}(\mathbf{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(s)}(\mathbf{p}) = \not{p} - m. \quad (2.156)$$

^d Úsese la identidad $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Es importante notar que las 16 matrices,

$$\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.157)$$

son linealmente independientes y forman una base para las matrices 4×4 . Así que se pueden definir los siguientes *bilineales fermiónicos* con propiedades de transformación bien definidas (covariantes) bajo transformaciones de Lorentz,

$$\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \quad (2.158)$$

Puede comprobarse también que las transformaciones de Lorentz del campo de Dirac ψ pueden escribirse, en cualquier representación de las matrices gamma, de la forma

$$\psi \mapsto \exp\left\{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}\psi, \quad \text{i.e. } J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.159)$$

Una simetría global interesante que posee el lagrangiano de Dirac *sin masa* es la *simetría quiral*,

$$\psi_L \mapsto e^{-i\theta_L} \psi_L, \quad \psi_R \mapsto e^{-i\theta_R} \psi_R \quad (\theta_L \text{ y } \theta_R \text{ independientes}), \quad (2.160)$$

que, en términos del espinor de Dirac, puede escribirse

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha} \psi, \quad \psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5} \psi \quad (\alpha \text{ y } \beta \text{ independientes}). \quad (2.161)$$

En efecto, haciendo transformaciones infinitesimales,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\alpha} \psi = \begin{pmatrix} (1 - i\alpha)\psi_L \\ (1 - i\alpha)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \theta_R = \theta_L \equiv \alpha \quad (2.162)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\beta\gamma_5} \psi = \begin{pmatrix} (1 + i\beta)\psi_L \\ (1 - i\beta)\psi_R \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \theta_R = -\theta_L \equiv \beta. \quad (2.163)$$

Como

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha} \psi \Rightarrow \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} e^{i\alpha} \quad (2.164)$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5} \psi \Rightarrow \bar{\psi} \mapsto \psi^\dagger e^{i\beta\gamma_5} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 e^{-i\beta\gamma_5} = \bar{\psi} e^{-i\beta\gamma_5}, \quad (2.165)$$

$$\text{pues } \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (2.166)$$

la invariancia del lagrangiano bajo ambas transformaciones independientes es clara:

$$\psi \mapsto e^{-i\alpha} \psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\psi \mapsto i\bar{\psi}e^{i\alpha}\partial e^{-i\alpha}\psi = i\bar{\psi}\partial\psi = \mathcal{L} \quad (2.167)$$

$$\psi \mapsto e^{-i\beta\gamma_5} \psi \Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\psi \mapsto i\bar{\psi}e^{-i\beta\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{-i\beta\gamma_5}\psi = i\bar{\psi}\partial\psi = \mathcal{L}. \quad (2.168)$$

Hay por tanto dos corrientes conservadas,

$$j_V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{corriente vectorial}), \quad j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad (\text{corriente axial}). \quad (2.169)$$

Si $m \neq 0$ solo la corriente vectorial se conserva. Basta usar la ecuación de Dirac para comprobarlo:

$$(i\partial - m)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= m\psi \\ -i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu &= m\bar{\psi}, \quad \text{pues } \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_\mu j_V^\mu &= \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = im\bar{\psi} \psi - im\bar{\psi} \psi = 0 \\ \partial_\mu j_A^\mu &= \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi = im\bar{\psi} \gamma_5 \psi + im\bar{\psi} \gamma_5 \psi = 2im\bar{\psi} \gamma_5 \psi. \end{aligned} \quad (2.171)$$