

Campo electromagnético

Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell

El campo electromagnético viene descrito por el cuadvivector A^μ . Definiendo el tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, el campo eléctrico E y el campo magnético B vienen dados por

$$E^i = -F^{0i} = -\partial_t A^i - \nabla^i A^0, \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{jk} = (\nabla \times \mathbf{A})^i, \quad (2.178)$$

de donde $F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k$, pues $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}$.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al *lagrangiano de Maxwell*,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (2.179)$$

que también puede escribirse $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$, obtenemos las ecuaciones de movimiento (*ecuaciones de Maxwell* en el vacío)

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}} \quad (2.180)$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell se obtienen a partir del *tensor dual* $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, cuya cuatridivergencia es nula, pues $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$, así que

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}} \quad (2.181)$$

Simetría gauge

El lagrangiano de Maxwell es simétrico bajo transformaciones *locales* $\theta = \theta(x)$ de la forma

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (\text{transformación de gauge U(1)}). \quad (2.182)$$

La existencia de esta simetría local implica que $A_\mu(x)$ hace una descripción redundante del campo electromagnético, pues podemos usar la libertad de elección de gauge para restringir $A_\mu(x)$.

Coulomb:

podemos tomar $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. A esta elección,

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.189)$$

que solamente es posible en ausencia de fuentes, se le llama *gauge de radiación*.

Otra elección, que puede hacerse siempre, es

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta, \quad \partial_\mu \partial^\mu \theta \equiv \partial_\mu A^\mu \quad (2.190)$$

de modo que podemos tomar

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.191)$$

Es el llamado *gauge de Lorenz*.^e Entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu = 0. \quad (2.192)$$

Es decir, cada componente de A^μ satisface una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Sus soluciones son de la forma (A^μ es un campo real de masa cero)

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k) e^{-ikx} + \epsilon_\mu^*(k) e^{ikx}, \quad k^2 = 0. \quad (2.193)$$

La condición (2.191) implica que el vector de polarización $\epsilon^\mu(k)$ satisface

$$k\epsilon = 0. \quad (2.194)$$

En el gauge de radiación, compatible con el gauge de Lorenz, el campo es transversal pues la polarización $\epsilon^0 = 0$ y $k \cdot \epsilon = 0$.

En este punto conviene hacer la siguiente aclaración. A diferencia de la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, que solo puede imponerse en ausencia de fuentes, la condición $A^0 = 0$ puede usarse siempre, aunque no suele hacerse cuando hay fuentes. Por ejemplo, consideremos un observador frente a una carga e en reposo a una distancia r . En ese caso se suele tomar

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) = \left(\frac{e}{4\pi r}, 0 \right), \quad (2.195)$$

que conduce al campo electromagnético

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (2.196)$$

Sin embargo, podríamos haber elegido un gauge en el que

$$A'^\mu = (\phi', \mathbf{A}') = \left(0, -\frac{et}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \right), \quad (2.197)$$

^e No debe confundirse a L.V. Lorenz (físico y matemático danés), autor del *gauge de Lorenz*, con H.A. Lorentz (físico holandés, premio Nobel en 1902), que propuso las *transformaciones de Lorentz*. Tampoco con E.N. Lorenz (matemático y meteorólogo norteamericano), fundador de la teoría del caos, que acuñó el “efecto mariposa” y propuso el *atractor de Lorenz*.

que conduce al *mismo* campo electromagnético,

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}' - \nabla \phi' = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = 0. \quad (2.198)$$

Ambas elecciones están conectadas mediante la transformación de gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \theta(x) = \frac{et}{4\pi r}. \quad (2.199)$$

Hallemos ahora el tensor energía-momento. Aplicando el teorema de Noether obtenemos

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2, \quad F^2 \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.200)$$

que no es invariante gauge ni tampoco simétrico. Podemos simetrizarlo añadiéndole $\partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu)$, que cumple $\partial_\mu \partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu) = 0$ y además lo convierte en invariante gauge,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2 + \partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu) \\ &= F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2, \quad \text{cuando } \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Las cargas conservadas bajo transformaciones espaciotemporales son por tanto

$$E = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (\text{energía}) \quad (2.202)$$

$$\mathbb{P}^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \quad (\text{vector de Poynting}). \quad (2.203)$$

Acoplamiento mínimo con la materia

En presencia de fuentes del campo electromagnético (cargas y corrientes) las ecuaciones de Maxwell son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}), \quad (2.204)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (2.205)$$

Nótese que las dos últimas son las mismas que en ausencia de fuentes, debido a que $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$ en cualquier caso. Estas ecuaciones se obtienen al minimizar la acción

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (2.206)$$

que es *invariante gauge* solo si j^μ es una corriente conservada, $\partial_\mu j^\mu = 0$, pues

$$j^\mu A_\mu \mapsto j^\mu A_\mu - j^\mu \partial_\mu \theta \quad (2.207)$$

y, como $\int d^4x \partial_\mu (\theta j^\mu) = 0 \Rightarrow \int d^4x j^\mu \partial_\mu \theta = - \int d^4x \theta \partial_\mu j^\mu = 0$, tenemos que

$$\int d^4x j^\mu A_\mu \mapsto \int d^4x j^\mu A_\mu \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.208)$$

La invariancia gauge es el *principio que guía cómo deben ser las interacciones*. Veamos cómo funciona el método aplicándolo al lagrangiano de Dirac en presencia de un campo electromagnético. El lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (2.209)$$

no es invariante bajo transformaciones de gauge U(1) (transformaciones de fase *locales*),

$$\psi \mapsto e^{-iq\theta(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}e^{iq\theta(x)}. \quad (2.210)$$

Sin embargo, el lagrangiano de Maxwell,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.211)$$

sí es invariante bajo la transformación de gauge

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (2.212)$$

Podemos conseguir un lagrangiano total invariante gauge si cambiamos la derivada ∂_μ por la *derivada covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu + ieqA_\mu \quad (2.213)$$

pues entonces

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &= (\partial_\mu + ieqA_\mu)\psi \mapsto (\partial_\mu + ieqA_\mu + iq\partial_\mu\theta)e^{-iq\theta}\psi \\ &= e^{-iq\theta}(-iq\partial_\mu\theta + \partial_\mu + ieqA_\mu + iq\partial_\mu\theta)\psi = e^{-iq\theta}D_\mu\psi \end{aligned} \quad (2.214)$$

y el lagrangiano resultante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eqA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.215)$$

q se elige generalmente igual a 1

es invariante gauge. De esta forma, hemos introducido una interacción de la forma $j^\mu A_\mu$ (*acoplamiento mínimo*) entre la corriente fermiónica,

$$j^\mu = eq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.216)$$

y el campo electromagnético, que nos permite restaurar la simetría local. Nótese que j^μ es una corriente conservada debida a la invariancia global de $\mathcal{L}_D$ bajo transformaciones de fase U(1). Por tanto,

$$Q = \int d^3x j^0(x) = eq \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi = eq \int d^3x \psi^\dagger\psi \quad (2.217)$$

q se elige generalmente igual a 1

es la *carga eléctrica*. Otras interacciones invariantes gauge son posibles, pero involucran términos de interacción con dimensión canónica mayor que cuatro, que por tanto deben ir multiplicados por constantes que tienen dimensiones de masa elevada a una potencia negativa. Por ejemplo, la interacción dipolar magnética

$$\mathcal{L} = a\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \quad [a] = M^{-1}. \quad (2.218)$$

Tales acoplamientos surgirán de forma natural al cuantizar la teoría y constituyen correcciones al acoplamiento mínimo de siguiente orden en teoría de perturbaciones.

Nota: En general, si $\{T^a\}$ son los generadores del grupo de simetrías gauge, $\{W_\mu^a(x)\}$ los bosones de gauge asociados a cada generador y $\{\theta^a(x)\}$ los parámetros de la transformación, es fácil comprobar que si los campos se transforman

$$\psi \mapsto U\psi, \quad U = \exp\{-iT^a\theta^a(x)\} \quad (2.219)$$

$$\tilde{W}_\mu \mapsto U\tilde{W}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \quad \tilde{W}_\mu \equiv T^a W_\mu^a, \quad (2.220)$$

introduciendo la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\tilde{W}_\mu \quad (2.221)$$

se tiene que

$$D_\mu \psi \mapsto UD_\mu \psi \quad (2.222)$$

y el lagrangiano resultante

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (2.223)$$

queda invariante. Para un grupo de simetrías no abeliano, el lagrangiano invariante de los campos de gauge (2.211) debe generalizarse e incluye, además de los términos cinéticos, autointeracciones cúbicas y cuárticas fijadas por las constantes de estructura:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{\tilde{W}_{\mu\nu}\tilde{W}^{\mu\nu}\right\} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} \quad (2.224)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{cubic}} + \mathcal{L}_{\text{quartic}} \quad (2.225)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)(\partial^\mu W^{a,\nu} - \partial^\nu W^{a,\mu}) \\ \mathcal{L}_{\text{cubic}} &= \frac{1}{2}g f^{abc} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a) W^{b,\mu} W^{c,\nu}\end{aligned}\tag{2.226}$$

$$\mathcal{L}_{\text{quartic}} = -\frac{1}{4}g^2 f^{abe} f^{cde} W_\mu^a W_\nu^b W^{c,\mu} W^{d,\nu}\tag{2.227}$$

y

$$\tilde{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \tilde{W}_\nu - \partial_\nu \tilde{W}_\mu + ig[\tilde{W}_\mu, \tilde{W}_\nu] \mapsto U \tilde{W}_{\mu\nu} U^\dagger\tag{2.228}$$

$$\Rightarrow W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c.\tag{2.229}$$

En el caso del grupo U(1) del electromagnetismo el único generador es un múltiplo de la identidad, $T = q$, la carga del campo en unidades del acoplamiento $g = e$. En adelante la llamaremos Q_f , pues será la carga eléctrica (en unidades de e) del fermión f que aniquila el campo cuántico ψ .