Cuantización de campos libres

3.1 Campos escalares

3.1.1 Espacio de Fock

Recordemos que para cuantizar un sistema clásico de coordenadas q^i y momentos p^i en el picture de Schrödinger promovemos q^i y p^i a operadores e imponemos las reglas de conmutación (en unidades $\hbar = 1$):

$$[q^i, p^j] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q^i, q^j] = [p^i, p^j] = 0. \tag{3.1}$$

En el picture de Heisenberg, en la que los operadores dependen del tiempo,

$$q^j_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} q^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \quad p^j_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} p^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{3.2}$$

$$\left(\Rightarrow \quad \partial_t q^j_H = \mathrm{i}Hq^j_H - \mathrm{i}q^j_H H = -\mathrm{i}[q_H, H], \quad \text{si } \partial_t q^j = 0 \right)$$

imponemos las reglas de conmutación en tiempos iguales,

$$[q_H^i(t), p_H^j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_H^i(t), q_H^j(t)] = [p_H^i(t), p_H^j(t)] = 0. \tag{3.3}$$

En teoría de campos hemos reemplazado $q_H^i(t)$ por $\phi(t,\boldsymbol{x})$ y $p_H^i(t)$ por $\Pi(t,\boldsymbol{x})$, así que para cuantizar los campos los promovemos a operadores e imponemos[a]

$$\boxed{[\phi(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad [\phi(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{y})] = [\Pi(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{y})] = 0} \tag{3.4}$$

Estudiemos en primer lugar el caso del campo escalar real,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}), \quad p^0 = E_{\boldsymbol{p}} \equiv +\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}, \tag{3.5}$$

donde ahora ϕ, $a_{\boldsymbol{p}}$ y $a_{\boldsymbol{p}}^\dagger$ son *operadores*. Recordando que

$$\Pi(t,\boldsymbol{y}) = \partial_t\phi(t,\boldsymbol{y}) = \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{2}}\right)\left(a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy} - a_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}qy}\right) \tag{3.6}$$

[a] Este procedimiento se llama *cuantización canónica*. Existe un procedimiento alternativo, el *formalismo de integrales de camino* que resulta particularmente útil para cuantizar teorías de campos gauge.

Lo vamos a estudiar más adelante.

es fácil comprobar que (3.4) implica

$$\boxed{[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}), \quad [a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}] = [a^\dagger_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = 0} \tag{3.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}[\phi(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{y})] =& \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\boldsymbol{q}}}{2}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \\ &\times\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_p-E_q)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_p-E_q)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y})}\right) \\ =&\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\right) = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde se ha usado que

$$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \delta^3(-\boldsymbol{x}) = \delta^3(\boldsymbol{x}). \tag{3.9}$$

Las reglas de conmutación (3.7) nos recuerdan a los *operadores creación y destrucción* de modos de energía $\hbar\omega$ de un *oscilador armónico* con hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \tag{3.10}$$

cuyas soluciones se hallan introduciendo los operadores (reinsertamos las $\hbar$ para refrescar mejor la memoria):

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger), \tag{3.11}$$

que satisfacen las reglas de conmutación,

$$[x, p] = \mathrm{i}\hbar \quad \Rightarrow \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{3.12}$$

De ellas se deduce que

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}). \tag{3.13}$$

Definiendo el estado de mínima energía (el *vacío*) $|0\rangle$ como aquél que es aniquilado por el operador a y aplicando (3.12)

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger, \quad [H, a] = -\hbar\omega a, \tag{3.14}$$

tenemos que, normalizando $\langle 0|0\rangle = 1$,

$$a\,|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \quad |n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle \tag{3.15}$$

de donde $a^\dagger a$ es el operador número de modos, $|0\rangle$ tiene energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (energía del punto cero) y $|n\rangle$ tiene energía $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$. Los autoestados $\{|n\rangle\}$ del hamiltoniano forman el espacio de Hilbert del sistema, llamado *espacio de Fock*.

Volviendo a nuestra teoría de campos, vemos que (3.7) son las relaciones de conmutación de un *conjunto infinito de osciladores armónicos*, uno por cada valor de $\boldsymbol{p}$, excepto por un factor de normalización que es el volumen (infinito) del sistema, pues

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = \lim_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q}}\int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} = V(\to\infty). \tag{3.16}$$

Podemos construir entonces el espacio de Fock de estados usando los operadores creación ($a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$) y destrucción ($a_{\boldsymbol{p}}$) de modos de momento $\boldsymbol{p}$, a partir de (3.7) y $a_{\boldsymbol{p}}\,|0\rangle = 0$. Así obtenemos los *estados multipartícula*:

$$|\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\ldots\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\cdots a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\cdots|0\rangle\,. \tag{3.17}$$

La normalización ha sido elegida convenientemente de modo que es invariante Lorentz. En efecto, tomemos por simplicidad el *estado de una partícula* de momento $\boldsymbol{p}$,

$$|\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\, a^\dagger_{\boldsymbol{p}} |0\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\, \langle 0| a_{\boldsymbol{q}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} |0\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{3.18}$$

que es una normalización invariante pues si hacemos e.g. un *boost* en la dirección z,

$$E' = \gamma(E+\beta p_z), \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma(\beta E + p_z) \tag{3.19}$$

vemos que

$$\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}') = \frac{\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\gamma\left(\beta\dfrac{\partial E}{\partial p_z}+1\right)} = \frac{E\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\gamma(\beta p_z + E)} = \frac{E}{E'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$
$$\Rightarrow \quad E_{\boldsymbol{p}'}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}') = E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\ . \tag{3.20}$$

En el primer paso se ha usado

$$\delta(f(x)-f(x_0)) = \frac{\delta(x-x_0)}{\left|\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=x_0)\right|}\ , \quad f(x) = p'_z(p_z) = \gamma(\beta E + p_z)\ , \tag{3.21}$$

y en el segundo,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_z} = \frac{p_z}{E}\ , \quad \text{pues } E = \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\ . \tag{3.22}$$

Veamos ahora cuál es la energía de los estados multipartícula. Para ello expresaremos primero el hamiltoniano en términos de operadores creación y destrucción (hacemos el cálculo en $t = 0$ por simplicidad, pues el hamiltoniano es una constante del movimiento):

$$
\begin{aligned}
H = \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}(x) = \int \mathrm{d}^3x\ \frac{1}{2}\left(\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \\
\times \Big\{ - E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{q}} \left(a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} - a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}}\right) \\
- \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} \left(a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} - a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}}\right) \\
+ m^2 \left(a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} + a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}}\right) \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ E_{\boldsymbol{p}}(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}} + a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ E_{\boldsymbol{p}}\left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2}V\right). \tag{3.23}
$$

El segundo término es la suma de la energía del punto cero de todos los osciladores,

$$
E_{\text{vac}} = V\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{vac}} = \frac{E_{\text{vac}}}{V} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}}. \tag{3.24}
$$

No nos preocupa que la energía total del sistema, que tiene un volumen infinito, sea divergente. Pero vemos que, además, la *densidad de energía del vacío* ρ_{vac} es infinita. Esto tampoco es un problema, pues estamos interesados en diferencias de energía,[b] así que podemos substraer la energía del punto cero y declarar que el hamiltoniano es

$$H \equiv \int \mathrm{d}^3 x \ : \frac{1}{2} \left(\Pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right) : = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \ E_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} \tag{3.25}$$

donde $: \mathcal{O} :$ es el *orden normal* de $\mathcal{O}$, que consiste en escribir todos los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción. Así,

$$: a_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} : \equiv \ a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}. \tag{3.26}$$

De este modo el vacío tiene energía cero y

$$\begin{aligned} H \left| \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \ldots \right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \ E_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}} \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}} \cdots a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2} \cdots \left| 0 \right\rangle \\ &= \left(E_{\boldsymbol{p}_1} + E_{\boldsymbol{p}_2} + \cdots \right) \left| \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 \ldots \right\rangle , \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde se ha aplicado $a_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_i} = (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_i) + a^\dagger_{\boldsymbol{p}_i} a_{\boldsymbol{p}}$ de (3.7) y $a_{\boldsymbol{p}} \left| 0 \right\rangle = 0$.

En cuanto al momento,

$$
\begin{aligned}
P^i &= \int \mathrm{d}^3x \ :\partial^0\phi\partial^i\phi: = \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \\
&\quad \times :\Big\{ -E_{\boldsymbol{p}}q^i a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+q)x} - E_{\boldsymbol{p}}q^i a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)x} + E_{\boldsymbol{p}}q^i a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-q)x} + E_{\boldsymbol{p}}q^i a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)x}\Big\}: \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ p^i :(-a_{\boldsymbol{p}}a_{-\boldsymbol{p}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{-\boldsymbol{p}} + a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}): \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ p^i a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}},
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

donde los dos primeros sumandos son nulos porque resultan de la integración de una función impar en un intervalo simétrico. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
P^i\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\ldots\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\ p^i a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\cdots a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}a^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}\cdots|0\rangle \\
&= (p^i_1 + p^i_2 + \cdots)\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\ldots\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Nótese que los estados multipartícula $|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\ldots\rangle$ son simétricos bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera, porque los operadores creación conmutan entre sí. Por otro

---

[b] Esto no puede hacerse si se incluye gravedad, pues entonces la energía del vacío es relevante. La energía del punto cero está relacionada con la constante cosmológica.

lado, recordemos que del teorema de Noether se deduce que los campos escalares tienen espín cero, así que los cuantos que crea y destruye un campo escalar son partículas de espín cero. Tenemos por tanto justificada la *conexión espín-estadística* que establece que las partículas de espín entero (0, 1, 2, ...) son bosones, es decir, obedecen la estadística de Bose-Einstein, que implica que sus estados son simétricos bajo intercambio. Veremos que la imposición de reglas de anticonmutación para la cuantización de campos de espín $\frac{1}{2}$, para evitar que el hamiltoniano no esté acotado inferiormente, conduce también de forma automática a estados multipartícula antisimétricos bajo intercambio, como corresponde a los fermiones. Es decir, en Teoría Cuántica de Campos la conexión espín-estadística *no es un postulado sino un teorema*.

3.1.2 Campos complejos. Antipartículas

Si el campo escalar es complejo,

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \right), \quad \phi^\dagger(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right). \tag{3.30}$$

Entonces,

$$\begin{array}{l} [\phi(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ [\phi(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{y})] = [\Pi(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{y})] = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} [a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = [b_{\boldsymbol{p}}, b^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \\ [a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}] = [b_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{q}}] = [a_{\boldsymbol{p}}, b^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = 0. \end{array} \tag{3.31}$$

De forma análoga al caso del campo real, construimos el espacio de Fock a partir de

$$a_{\boldsymbol{p}} |0\rangle = b_{\boldsymbol{p}} |0\rangle = 0, \tag{3.32}$$

aplicando $a_{\boldsymbol{p}}^\dagger$ y $b_{\boldsymbol{p}}^\dagger$ sucesivamente. Es fácil demostrar que, tomando el orden normal,

$$H = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\; E_{\boldsymbol{p}}(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{p}} + b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}}), \quad P^i = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\; p^i(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{p}} + b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}}). \tag{3.33}$$

Vemos que los cuantos de un campo escalar complejo son dos especies de igual masa creadas por $a_{\boldsymbol{p}}^\dagger$ y $b_{\boldsymbol{p}}^\dagger$, respectivamente.

La carga U(1) conservada es

$$\begin{aligned}
Q = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x \; :\phi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi: &= \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \\
&\times : \left\{ \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right) \partial_0 \left(a_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) - \partial_0 \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right) \left(a_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) \right\} : \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} \\
&\times : \left\{ \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right) E_{\boldsymbol{q}} \left(a_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} - b_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) + E_{\boldsymbol{p}} \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} - b_{\boldsymbol{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \right) \left(a_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + b_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) \right\} : \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} : \left(a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{q}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-p)x} - b_{\boldsymbol{p}} b_{\boldsymbol{q}}^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q-p)x} \right) :
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} (a_{\boldsymbol{p}}^\dagger a_{\boldsymbol{p}} - b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}}). \tag{3.34}$$

Por tanto, el estado $a_{\boldsymbol{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q = +1$ y $b_{\boldsymbol{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q = -1$. Ya estamos en situación de interpretar las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de energía negativa. El coeficiente de la solución de energía positiva de un campo *complejo* ϕ se convierte al cuantizar el campo en el operador destrucción de una *partícula* (carga unidad) mientras que el coeficiente de la solución de energía negativa se convierte en el operador creación de su *antipartícula* (carga opuesta). Para el campo $\phi^\dagger$ ocurre lo contrario, pues se intercambian los roles de partícula y antipartícula. Si el campo es *real*, $a_{\boldsymbol{p}} = b_{\boldsymbol{p}}$, entonces crea y destruye partículas que *coinciden* con su propia antipartícula.