Teoría de Campos 2020 - Práctica

Campos de Maxwell y Proca (Ejercicio 28)

Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \,,$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \,,$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Ecs. de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A^\nu \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0$$

Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \,,$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Ecs. de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A^\nu \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 \implies \ldots \implies$$

Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \,,$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Ecs. de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A^\nu \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 \implies \ldots \implies$$

$$\implies \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0}$$

Campo de Proca ($m \neq 0$)

Ec. movimiento: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0}$

Tomando derivada respecto a x^ν:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$$

Campo de Proca ($m \neq 0$)

Ec. movimiento: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0}$

Tomando derivada respecto a x^ν:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \implies \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}}_{= \frac{1}{2}\partial_\nu \partial_\mu (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$$

Campo de Proca ($m \neq 0$)

Ec. movimiento: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0}$

Tomando derivada respecto a x^ν:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \implies \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}}_{=0} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{\partial_\nu A^\nu = 0} \text{ (vínculo)}$$

Grados de libertad Proca

Usando el vínculo, las ecs. de movimiento quedan

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 \implies \Box A^\nu + \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} + m^2 A^\nu = 0\,.$$

Entonces, las ecs. de movimiento quedan:

$$\begin{aligned} \left(\Box + m^2\right) A^\mu &= 0\,, \\ \partial_\mu A^\mu &= 0\,. \end{aligned}$$

$\therefore$ **El campo de Proca tiene 3 grados de libertad.**

Invariancia de gauge

Invariancia de gauge:

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)\,,$$

es una simetría local del Lagrangiano de Maxwell

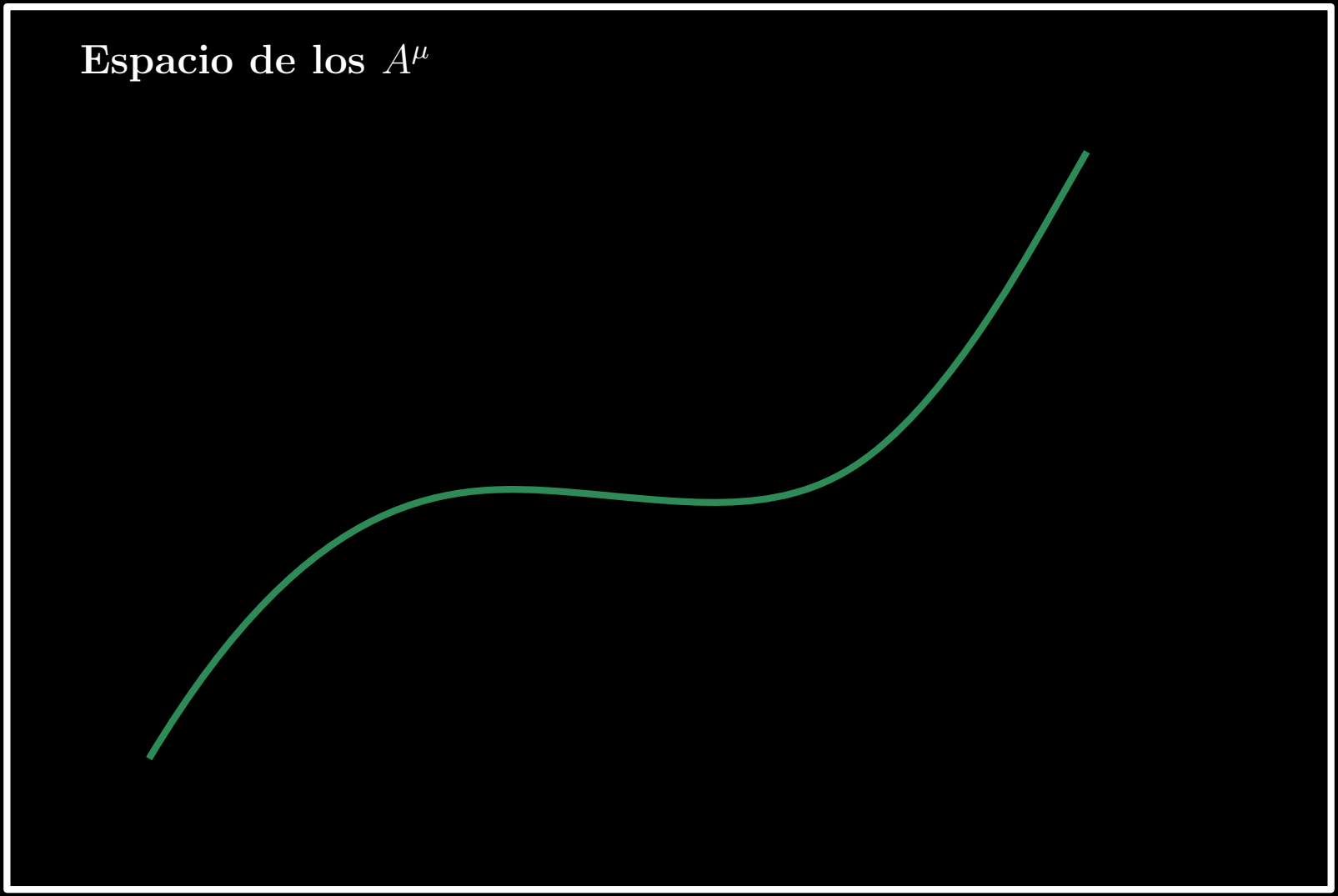
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\,,$$

ya que

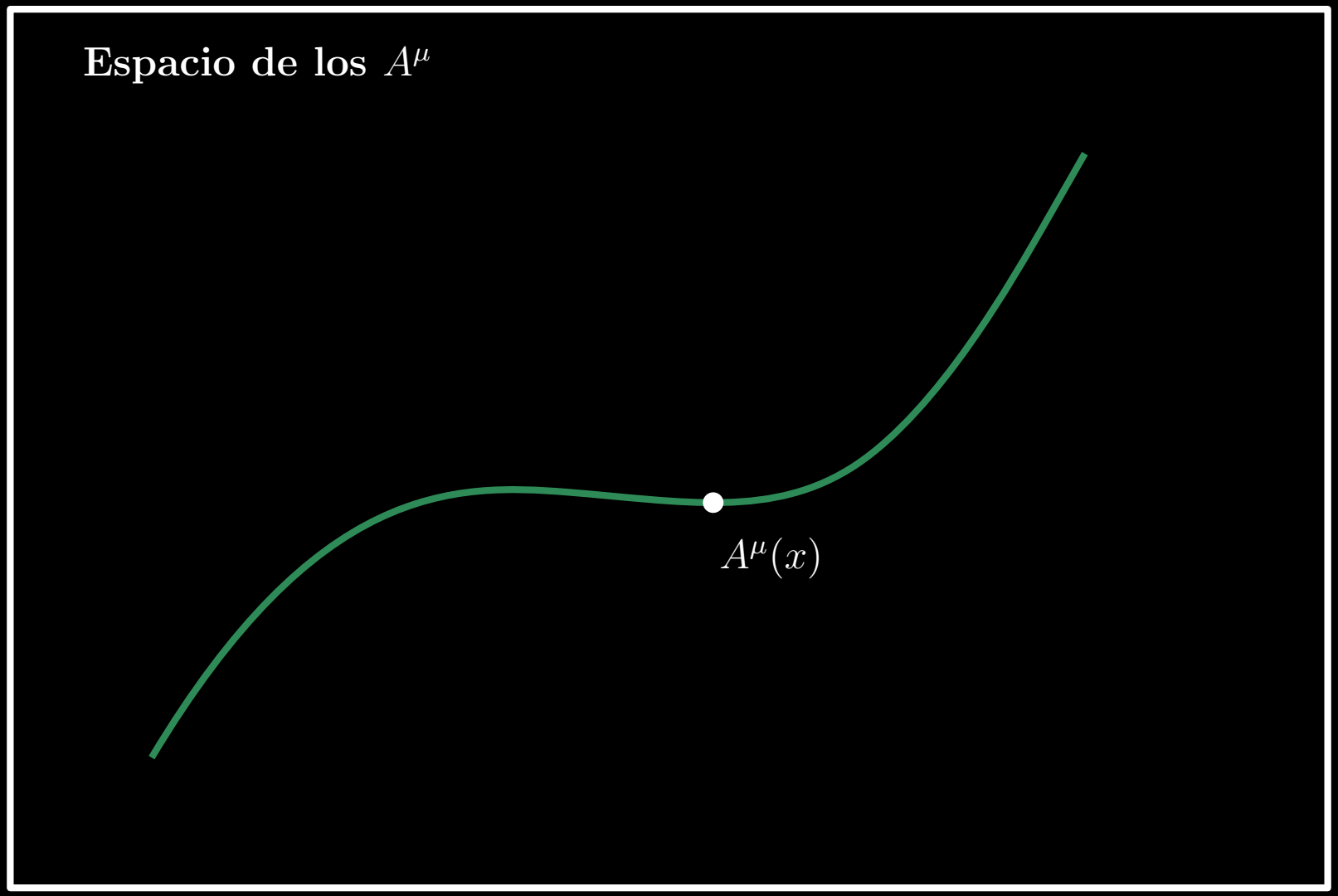
$$F^{\mu\nu} \;\longrightarrow\; \partial^\mu \left(A^\nu + \partial^\nu \Lambda\right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \partial^\mu \Lambda\right) \;=\; F^{\mu\nu}\,.$$

No hay forma de distinguir A^μ de $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ (invariancia de gauge).

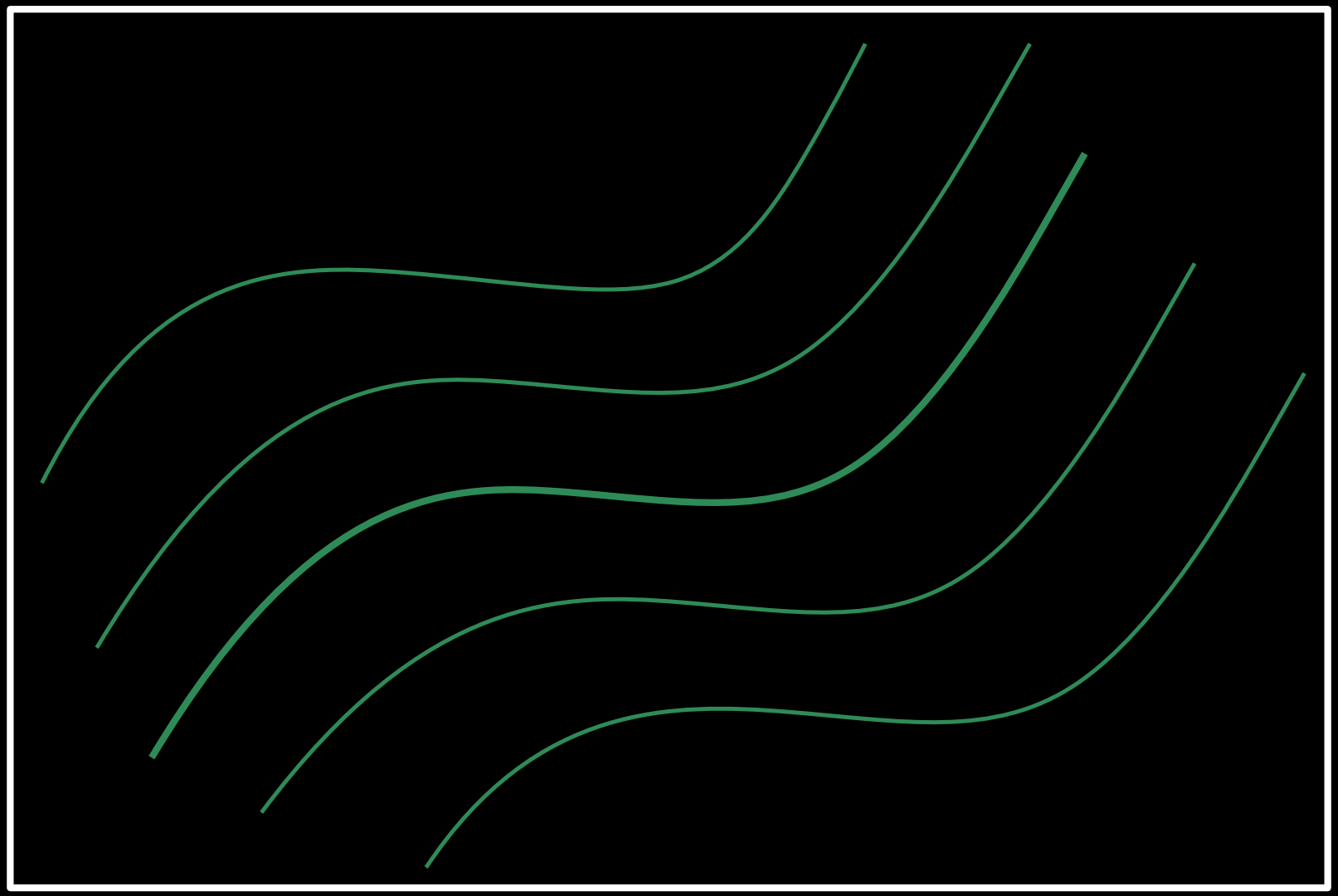
Fijación de gauge



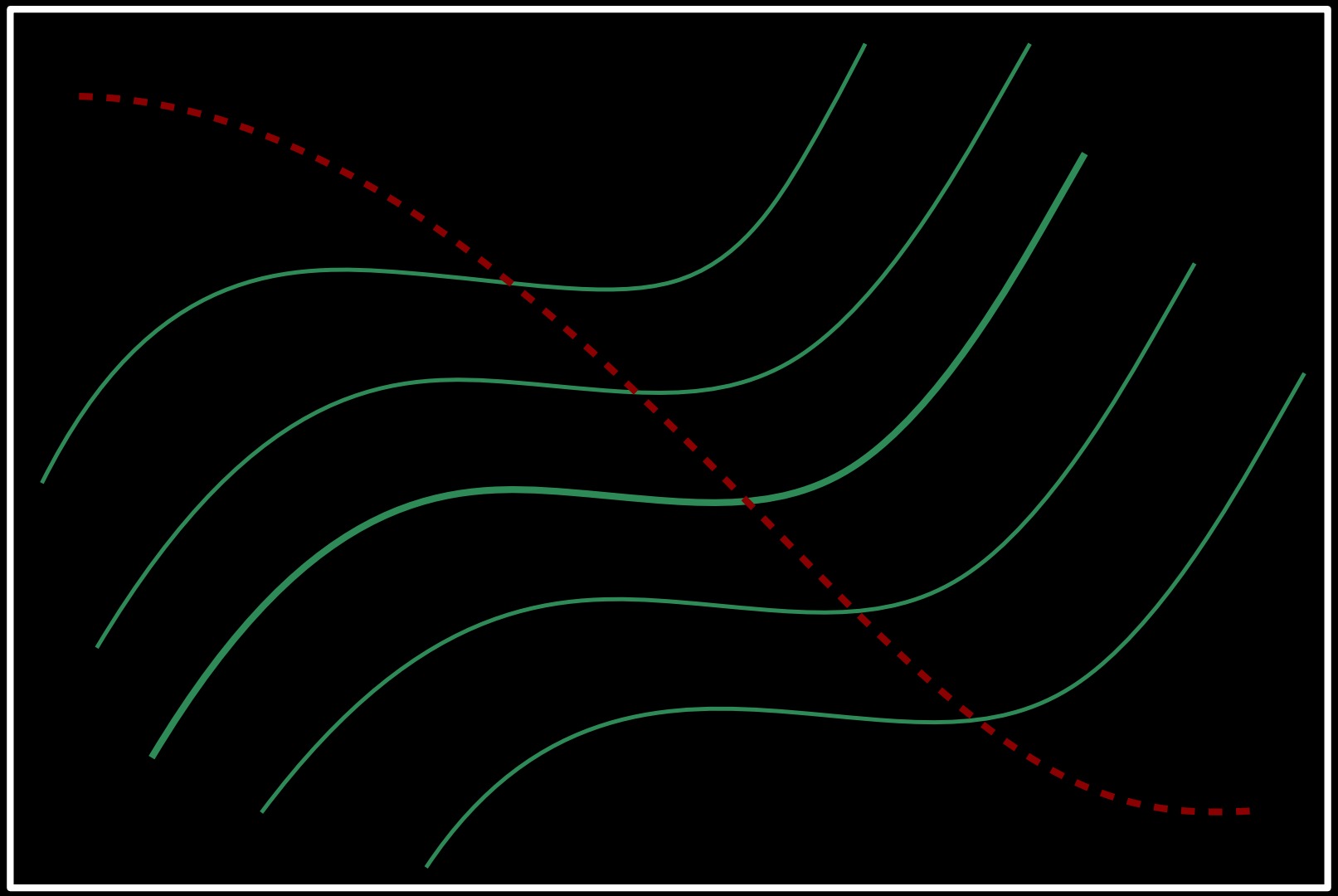
Fijación de gauge



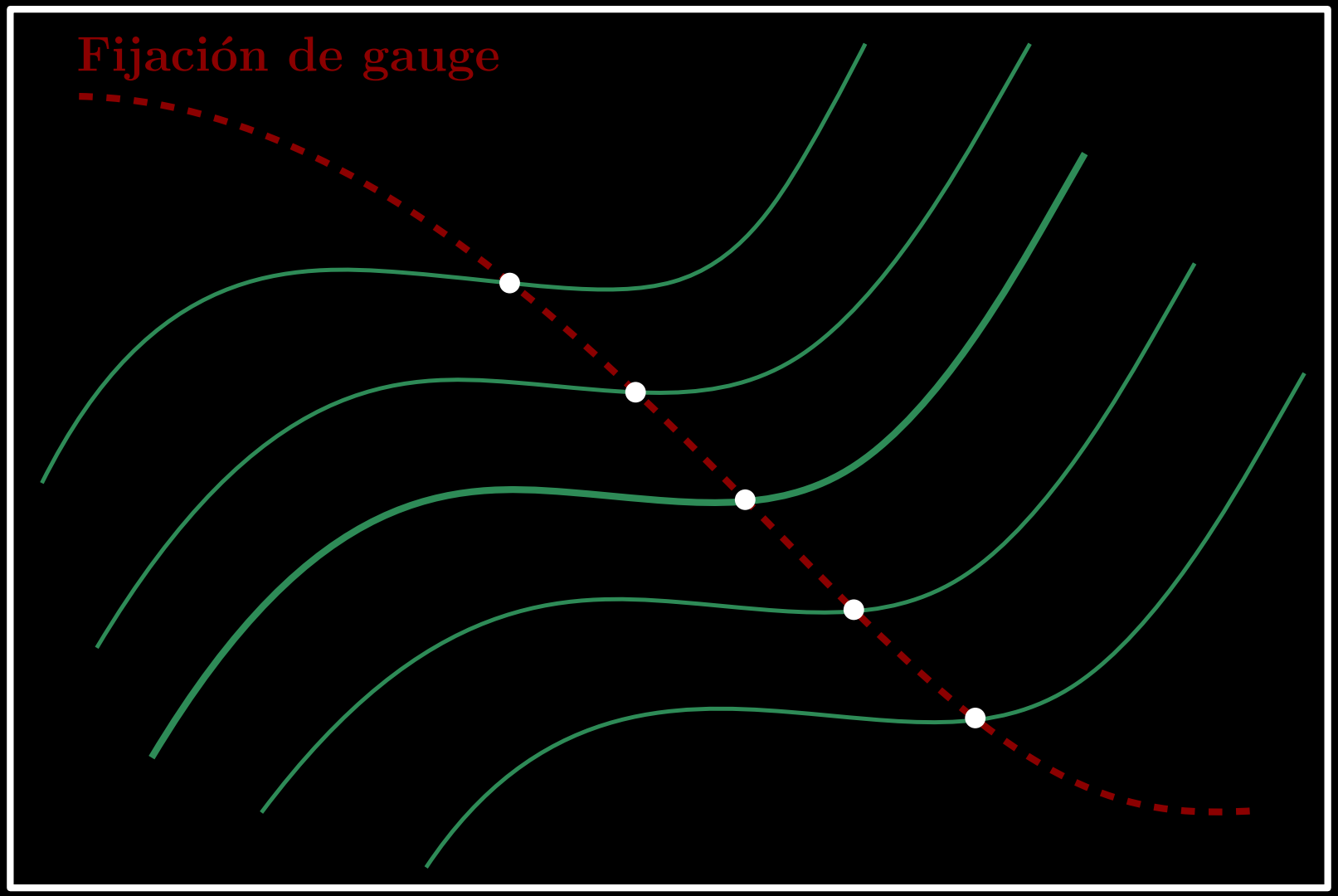
Fijación de gauge



Fijación de gauge



Fijación de gauge



Fijación de gauge

Fijar un gauge: dar condición que seleccione un campo de la órbita dada por los $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$.

Fijación de gauge

Fijar un gauge: dar condición que seleccione un campo de la órbita dada por los $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$.

Ejemplos:

- Gauge de Lorentz: Imponemos $\partial_\mu A^\mu = 0$ (fijación parcial).

  Supongamos que $\partial_\mu A^\mu = 0$ y consideremos $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$.

  $$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \Lambda \,,$$

  que se anula si Λ es la solución de $\Box \Lambda = 0$.

- Gauge de Coulomb (o de radiación): Imponemos $\mathrm{div} \bar{A} = 0$. Esto resulta en $A^0 = 0$ y $\partial_i A_i = 0$ (ver por ejemplo: Sect. 8.2.3 del Schwartz).
- Hay otras formas de fijar el gauge añadiendo términos a $\mathcal{L}$ que veremos al cuantizar.

Grados de libertad Maxwell

Lagrangiano Maxwell:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \, .$$

Tendríamos 4 grados de libertad, pero al fijar el gauge completamente nos quedan sólo dos.

$\therefore$ **El campo de Maxwell tiene 2 grados de libertad.**