# Teoría de Campos 2020 - Práctica

Funciones de Green

# Función de Green

Para el campo escalar, cuya ecuación de movimiento es

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

vimos que

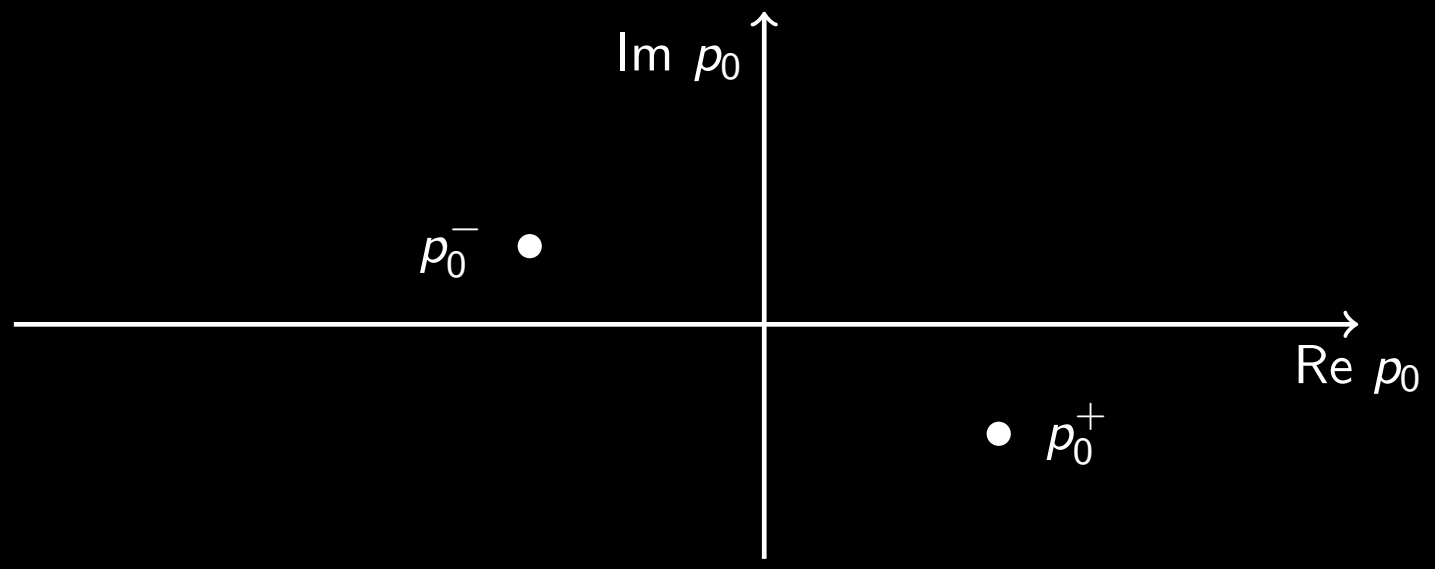
$$\Delta(x, y) = \int \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

es una función de Green, ya que se verifica

$$(\Box + m^2)\Delta(x, y) = -i\delta^4(x - y)$$

# Propagador

$$D(x,y) \equiv \langle 0| T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle = \int \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$



# Ejercicio 60

Ejercicio 60: Considerar el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda \left( \partial \cdot A \right)^2 ,$$

con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Escribir la ecuación de movimiento e invertirla para encontrar la expresión de la función de Green (si se elige la prescripción $i\epsilon$ para sortear los polos se obtiene el propagador de Feynman).

# Ejercicio 60

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda \left( \partial \cdot A \right)^2 \, .$$

Ecuación de movimiento:

$$\Box A^\nu - (1-\lambda) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \, ,$$

$$\left[ \Box g^\nu_\mu - (1-\lambda) \partial^\nu \partial_\mu \right] A^\mu = 0 \, ,$$

La función de Green $\Delta^{\nu\rho}(x-y)$ se define entonces como aquella tal que

$$\left[ \Box g^\nu_\mu - (1-\lambda) \partial^\nu \partial_\mu \right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho} \delta^4(x-y) \, .$$

# Ejercicio 60

Ecuación que cumple la función de Green:

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

La forma más sencilla de hallar $\Delta^{\mu\rho}(k)$ es pasar a espacio de momentos introduciendo su transformada de Fourier $\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$:

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$$

# Ejercicio 60

Ecuación que cumple la función de Green:

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

La forma más sencilla de hallar $\Delta^{\mu\rho}(k)$ es pasar a espacio de momentos introduciendo su transformada de Fourier $\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$:

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$$

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

# Ejercicio 60

Ecuación que cumple la función de Green:

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

La forma más sencilla de hallar $\Delta^{\mu\rho}(k)$ es pasar a espacio de momentos introduciendo su transformada de Fourier $\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$:

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$$

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \left[-k^2 g_\mu^\nu + (1-\lambda)k^\nu k_\mu\right] e^{-ik(x-y)}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = -g^{\nu\rho}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)}\,.$$

# Ejercicio 60

Ecuación que cumple la función de Green:

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

La forma más sencilla de hallar $\Delta^{\mu\rho}(k)$ es pasar a espacio de momentos introduciendo su transformada de Fourier $\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$:

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$$

# Ejercicio 60

Ecuación que cumple la función de Green:

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \Delta^{\mu\rho}(x-y) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

La forma más sencilla de hallar $\Delta^{\mu\rho}(k)$ es pasar a espacio de momentos introduciendo su transformada de Fourier $\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$:

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k)$$

$$\left[\Box g_\mu^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu \partial_\mu\right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = -g^{\nu\rho}\delta^4(x-y)\,.$$

$$\int d^4k \left[-k^2 g_\mu^\nu + (1-\lambda)k^\nu k_\mu\right] \tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) e^{-ik(x-y)} = \int d^4k(-g^{\nu\rho})e^{-ik(x-y)}\,.$$

# Ejercicio 60

$$\boxed{\left[k^2 g_\mu^\nu - (1-\lambda) k^\nu k_\mu\right] \tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = g^{\nu\rho}}$$

¿Cómo encontrar la solución a esta ecuación? $\rightarrow$ Propongo:

$$\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = a\frac{g^{\mu\rho}}{k^2} + b\frac{k^\mu k^\rho}{k^4}$$

# Ejercicio 60

$$\left[k^2 g_\mu^\nu - (1-\lambda)k^\nu k_\mu\right]\left(a\frac{g^{\mu\rho}}{k^2} + b\frac{k^\mu k^\rho}{k^4}\right) = g^{\nu\rho}$$

$$ag^{\nu\rho} + b\frac{k^\nu k^\rho}{k^2} - (1-\lambda)a\frac{k^\nu k^\rho}{k^2} - (1-\lambda)b\frac{k^\nu k^\rho}{k^2} = g^{\nu\rho}$$

Entonces:

$$\boxed{a = 1}$$

$$b - (1-\lambda)a - (1-\lambda)b = 0$$

$$\boxed{b = (1-\lambda)/\lambda}$$

# Ejercicio 60

Entonces:

$$\tilde{\Delta}^{\mu\rho}(k) = \frac{g^{\mu\rho}}{k^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k^\mu k^\rho}{k^4}$$

y

$$\Delta^{\mu\rho}(u) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iku}\left(\frac{g^{\mu\rho}}{k^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k^\mu k^\rho}{k^4}\right)$$