

Teoría de Campos 2020 - Práctica

Teoría de Yukawa.

Teoría de Yukawa

Motivación: Describir la interacción fuerte

Teoría de Yukawa

Motivación: Describir la interacción fuerte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}M^2\phi^2}_{\mathcal{L}_{\text{K-G}}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - \underbrace{g\bar{\psi}\psi\phi}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}$$

Teoría de Yukawa

Motivación: Describir la interacción fuerte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}M^2\phi^2}_{\mathcal{L}_{\text{K-G}}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - \underbrace{g\bar{\psi}\psi\phi}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}$$

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_{\text{int}} = g\bar{\psi}\psi\phi$$

Teoría de Yukawa

Motivación: Describir la interacción fuerte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}M^2\phi^2}_{\mathcal{L}_{K-G}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{Dirac}} - \underbrace{g\bar{\psi}\psi\phi}_{\mathcal{L}_{int}}$$

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}\psi\phi$$

Simetría $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi \implies j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ corriente conservada \implies
 $Q = N^{\text{part.}} - N^{\text{anti-part.}}$

$$\begin{aligned} \langle \beta, t = +\infty | \alpha, t = -\infty \rangle &= \\ &= \langle \beta | T \left\{ \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4 z \mathcal{H}_I(z) \right) \right\} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_q (-i)^q \frac{1}{q!} \langle \beta | T \{ \mathcal{H}_I(z_1) \dots \mathcal{H}_I(z_q) \} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_q (-ig)^q \langle \beta | T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \} | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Teoría de Yukawa

Teorema de Wick

$$T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \}$$

= \sum : (Todas las combinaciones de contracciones posibles) :

Teoría de Yukawa

Teorema de Wick

$$T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \}$$

= \sum : (Todas las combinaciones de contracciones posibles) :

$$[\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \implies \overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x-y)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \neq 0 \implies \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = S_F(x-y)$$

$$[\phi, \psi] = [\phi, \bar{\psi}] = 0 \implies \overline{\phi\psi} = \overline{\phi\bar{\psi}} = 0$$

Teoría de Yukawa

Teorema de Wick

$$T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \}$$

= \sum : (Todas las combinaciones de contracciones posibles) :

$$[\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \implies \overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x-y)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \neq 0 \implies \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = S_F(x-y)$$

$$[\phi, \psi] = [\phi, \bar{\psi}] = 0 \implies \overline{\phi\psi} = \overline{\phi\bar{\psi}} = 0$$

(-1) al intercambiar fermiones!

Teoría de Yukawa

Teorema de Wick

$$T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \}$$

= \sum : (Todas las combinaciones de contracciones posibles) :

$$[\phi(x), \phi(y)] \neq 0 \implies \overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x-y)$$

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \neq 0 \implies \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = S_F(x-y)$$

$$[\phi, \psi] = [\phi, \bar{\psi}] = 0 \implies \overline{\phi\psi} = \overline{\phi\bar{\psi}} = 0$$

(-1) al intercambiar fermiones!

$$\text{Ej. } \overline{\psi(x)\psi(w)\bar{\psi}(y)\bar{\psi}(z)} = -\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(w)\bar{\psi}(z)} = -S_F(x-y)S_F(w-z)$$

Teoría de Yukawa

$$\begin{aligned} \langle \beta, t = +\infty | \alpha, t = -\infty \rangle &= \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_q (-ig)^q \langle \beta | T \{ \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) \phi(z_1) \dots \bar{\psi}(z_q) \psi(z_q) \phi(z_q) \} | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Simplificamos producto T-ordenado con Wick

Si contraemos todos nos queda $\langle \beta | \alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$, hay que dejar algunos sin contraer, ¿cuales? ¿cómo se simplifican?

Teoría de Yukawa

$$\phi(x) = \int \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}x} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i\mathbf{p}x} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

$$\phi|\mathbf{q}\rangle = \int \left[a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}x} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i\mathbf{p}x} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-i\mathbf{q}x} |0\rangle$$

$$\langle\mathbf{q}|\phi = \langle 0| e^{i\mathbf{q}x}$$

$$\overline{\phi|\mathbf{q}} = e^{-i\mathbf{q}x}$$

$$\overline{\langle\mathbf{q}|\phi} = e^{i\mathbf{q}x}$$

Teoría de Yukawa

$$\begin{aligned}\psi|\mathbf{p}^s\rangle &= \int \sum_s \left[b_p^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_p^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} \sqrt{2\omega_p} b_p^{s\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-ipx} u^s(\mathbf{p}) |0\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}|\bar{\mathbf{p}}^s\rangle &= \int \sum_s \left[b_p^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{ipx} + d_p^s \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} \sqrt{2\omega_p} d_{\bar{\mathbf{p}}}^{s\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-i\bar{p}x} \bar{v}^s(\mathbf{p}) |0\rangle\end{aligned}$$

Teoría de Yukawa

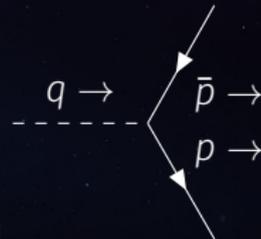
$$\overline{\phi|\mathbf{q}} = e^{-iqx}, \quad \langle \mathbf{q}|\phi = e^{iqx}$$

$$\overline{\psi|\mathbf{p}^s} = e^{-ipx} u^s(\mathbf{p}), \quad \langle \mathbf{p}^s|\overline{\psi} = e^{ipx} \bar{u}^s(\mathbf{p})$$

$$\overline{\psi|\mathbf{p}^s} = e^{-ipx} \bar{v}^s(\mathbf{p}), \quad \langle \mathbf{p}^s|\overline{\psi} = e^{ipx} v^s(\mathbf{p})$$

Teoría de Yukawa

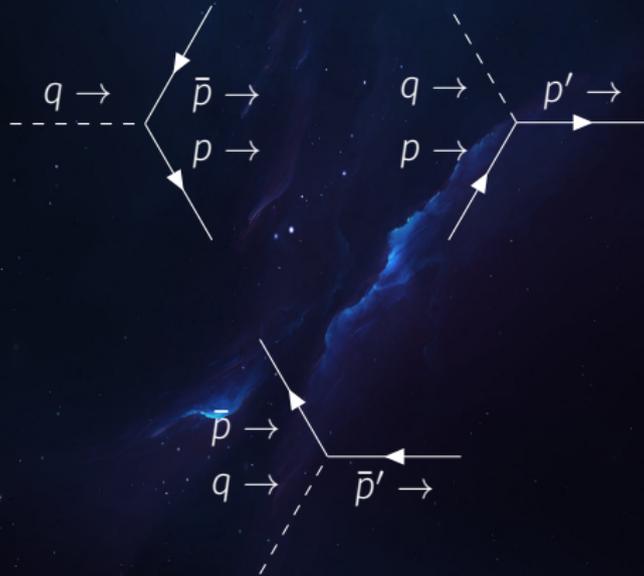
$$\begin{aligned}
 & \int d^4z \langle p^s, \bar{p}^r | T \{ \mathcal{H}_I(z) \} | q \rangle \\
 &= \int d^4z \langle p^s, \bar{p}^r | T \{ \bar{\psi}(z) \psi(z) \phi(z) \} | q \rangle \\
 &= \int d^4z \langle p^s, \bar{p}^r | \overbrace{\bar{\psi}(z) \psi(z)} \overbrace{\phi(z)} | q \rangle \\
 &= (-1) \int d^4z \langle p^s | \overbrace{\bar{\psi}(z)} \overbrace{\langle \bar{p}^r | \psi(z)} \overbrace{\phi(z)} | q \rangle \\
 &= (-1) \int d^4z \bar{u}^s(\mathbf{p}) v^r(\bar{\mathbf{p}}) e^{ipz} e^{i\bar{p}z} e^{-iqz}
 \end{aligned}$$



$$= (-1) \bar{u}^s(\mathbf{p}) v^r(\bar{\mathbf{p}}) (2\pi)^4 \delta(p + \bar{p} - q) =$$

Teoría de Yukawa

$T \longrightarrow$



Teoría de Yukawa

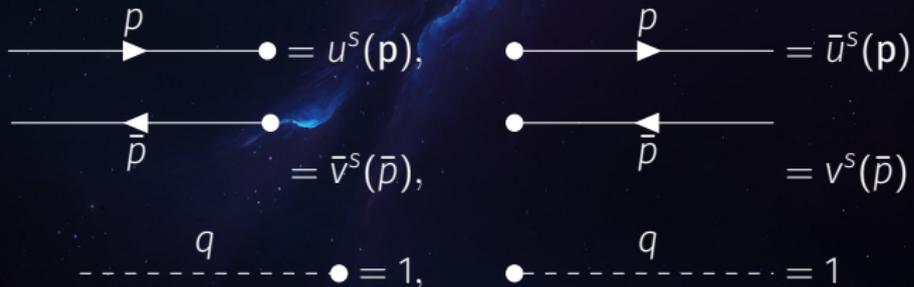
Realizar todos los diagramas de Feynman conectados y amputados.

Teoría de Yukawa

Realizar todos los diagramas de Feynman conectados y amputados.

Reglas de Feynman en el espacio de momentos

1. Patas externas



2. Líneas internas

$$\begin{aligned} \text{---} \rightarrow \text{---} \quad p &= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \text{---} \text{---} \quad q &= \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Teoría de Yukawa

2. Líneas internas

$$\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{---} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} = \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$$

3. Vértices

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad = -ig \end{array}$$

4. Conservación de momento sobre los vértices

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j \text{ saliente}} p'_j - \sum_{i \text{ entrante}} p_i \right).$$

4. Conservación de momento sobre los vértices

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j \text{ saliente}} p'_j - \sum_{i \text{ entrante}} p_i \right).$$

5. Integramos sobre el momento p de cada línea interna: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

4. Conservación de momento sobre los vértices

$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j \text{ saliente}} p'_j - \sum_{i \text{ entrante}} p_i \right).$$

5. Integramos sobre el momento p de cada línea interna: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

6. Dividimos por el factor de simetría.

Teoría de Yukawa

4. Conservación de momento sobre los vértices

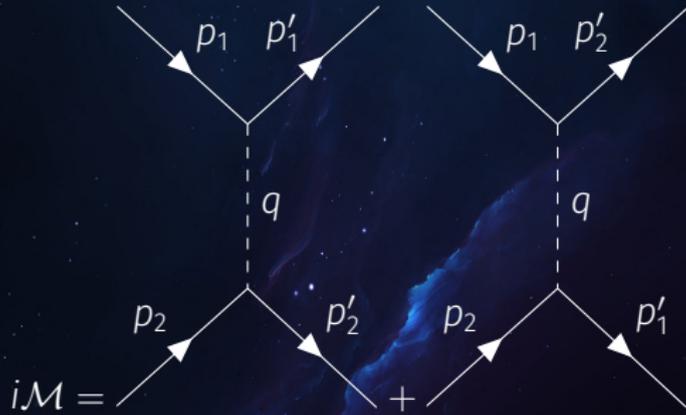
$$(2\pi)^4 \delta \left(\sum_{j \text{ saliente}} p'_j - \sum_{i \text{ entrante}} p_i \right).$$

5. Integramos sobre el momento p de cada línea interna: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

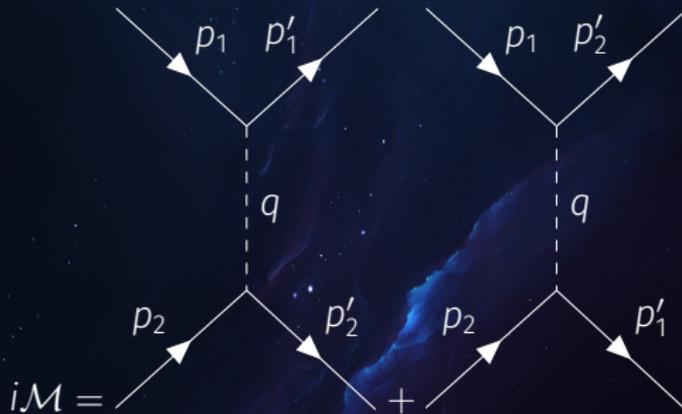
6. Dividimos por el factor de simetría.

7. Averiguar el signo global del diagrama.

Teoría de Yukawa



Teoría de Yukawa



$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} \\
 &= i(-ig)^2 \bar{u}^{r'}(p'_1) u^r(p_1) \bar{u}^{s'}(p'_2) u^s(p_2) \left[\frac{1}{(p'_1 - p_1)^2 - M^2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(p'_2 - p_1)^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \\
 &= ig^2 2M \delta_{s's} 2M \delta_{r'r} \left[\frac{1}{(p'_1 - p_1)^2 - M^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p'_2 - p_1)^2 - M^2 + i\epsilon} \right]
 \end{aligned}$$

$$p + n \rightarrow p + n$$

Teoría de Yukawa

$$p + n \rightarrow p + n$$

Proton quieto \implies Scattering neutrón por un potencial

$$p + n \rightarrow p + n$$

Proton quieto \implies Scattering neutrón por un potencial

$$\begin{aligned} & \langle n, t = +\infty | n, t = -\infty \rangle \\ &= \langle n | T \left\{ \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right) \right\} | n \rangle \approx \langle n | -i V_I | n \rangle \\ &\approx -i \langle n | V_I | n \rangle = -i \int d^3 \vec{x} e^{i \vec{p}' \cdot \vec{x}} V_I(\vec{x}) e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} = -i \tilde{V}_I(\vec{p}' - \vec{p}) \end{aligned}$$

Teoría de Yukawa

$p + n \rightarrow p + n$

$i\mathcal{M} = \dots \propto g^2 \frac{1}{(p'_n - p_n)^2 - m^2 + i\epsilon}$

Teoría de Yukawa

$$p + n \rightarrow p + n$$

$i\mathcal{M} = \dots \propto g^2 \frac{1}{(p'_n - p_n)^2 - m^2 + i\epsilon}$

baja velocidad $(p'_n - p_n)^2 \approx -|\vec{p}'_n - \vec{p}_n|^2$

Teoría de Yukawa

$$p + n \rightarrow p + n$$

$i\mathcal{M} = \propto g^2 \frac{1}{(p'_n - p_n)^2 - m^2 + i\epsilon}$

baja velocidad $(p'_n - p_n)^2 \approx -|\vec{p}'_n - \vec{p}_n|^2$ $i\mathcal{M} \propto ig^2 \frac{1}{|\vec{p}'_n - \vec{p}_n|^2 + M^2}$

Teoría de Yukawa

$p + n \rightarrow p + n$

$i\mathcal{M} = \dots \propto g^2 \frac{1}{(p'_n - p_n)^2 - m^2 + i\epsilon}$

baja velocidad $(p'_n - p_n)^2 \approx -|\vec{p}'_n - \vec{p}_n|^2$ $i\mathcal{M} \propto ig^2 \frac{1}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2 + M^2}$

Transformado Fourier $V_I(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-Mr}$, atractivo, decae rápido

Teoría de Yukawa

$p + n \rightarrow p + n$

$i\mathcal{M} = \dots \propto g^2 \frac{1}{(p'_n - p_n)^2 - m^2 + i\epsilon}$

baja velocidad $(p'_n - p_n)^2 \approx -|\vec{p}'_n - \vec{p}_n|^2$ $i\mathcal{M} \propto ig^2 \frac{1}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2 + M^2}$

Transformado Fourier $V_I(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-Mr}$, atractivo, decae rápido

Interacción nuclear $10^{-15}m \Rightarrow M \approx 200 m_e$: mesón

Teoría de Yukawa

π^0 : spin 0, $M \approx 270 m_e$, escalar real masivo!

